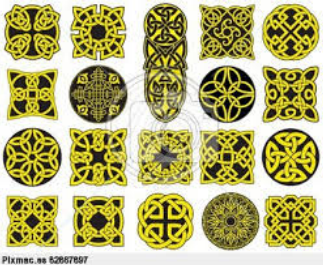
Nudos

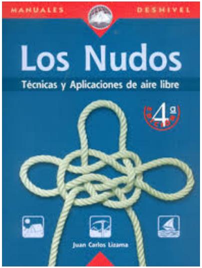
Fabiola Manjarrez Gutiérrez

26 de junio 2017

Dia 1




Los mejores
Nudos
de escalada
Desnivel
Tino Nuñez


MANUALES
DESNIVEL
Los Nudos
Técnicas y Aplicaciones de aire libre
4ª
Juan Carlos Lizama


CRISTIAN BIOSCA ROLLAND
MANUAL COMPLETO
DE NUDOS
108 NUDOS PASO A PASO
PARA TODAS LAS OCASIONES
Desnivel

El Diccionario de la Real Academia Espaola define un nudo así:

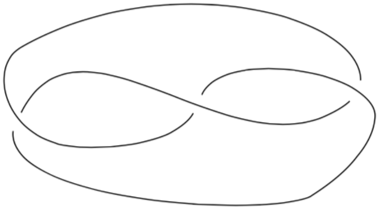
> *1. m. Lazo que se estrecha y cierra de modo que con dificultad se pueda soltar por sí solo, y que cuanto más se tira de cualquiera de los dos cabos, más se aprieta.*

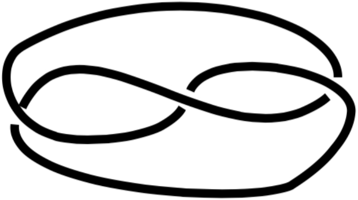
¿Qué es un nudo?

Intuitivamente:

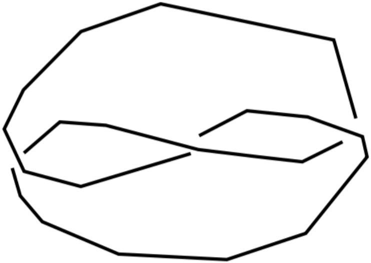


Para un matemático los nudos son curvas en el espacio tridimensional





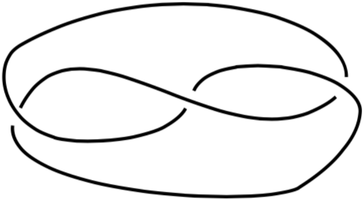
Vamos a pedir que un nudo sea una curva en el espacio hecha de segmentos de recta.

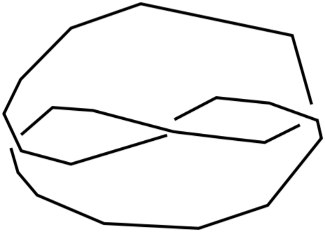


Nudo matemático

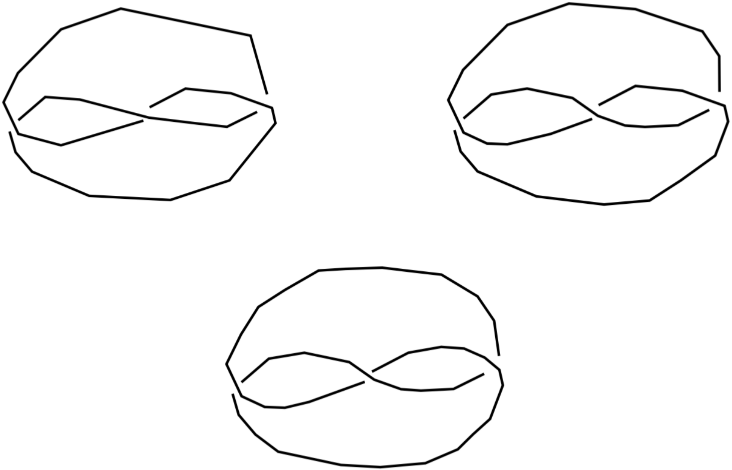
Un nudo es una curva simple cerrada K en el espacio tridimensional.
Y también que K sea una unión finita de segmentos de recta.

Usualmente dibujamos un nudo "redondito"



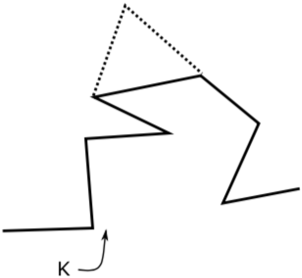


¿Son iguales estas curvas?

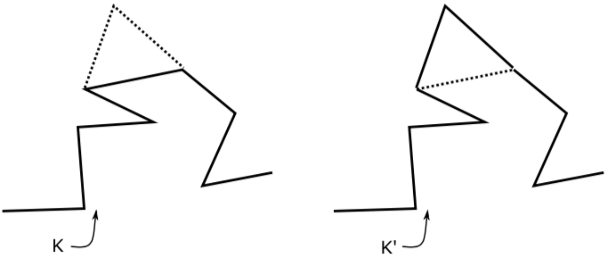


Tenemos que decir que significa iguales.

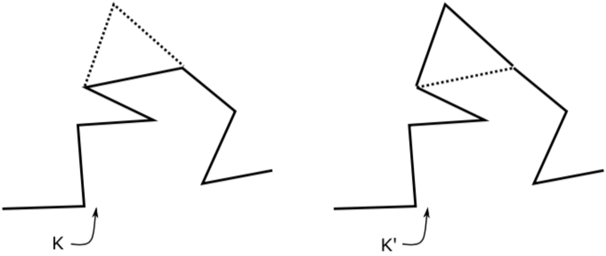
Sea K un nudo y sea Δ un triángulo en el espacio tales que Δ y K se tocan en exactamente un segmento de K y un lado de Δ



Hagamos el siguiente cambio:



Así obtenemos un nuevo nudo K.
(También podemos hacer el inverso.)

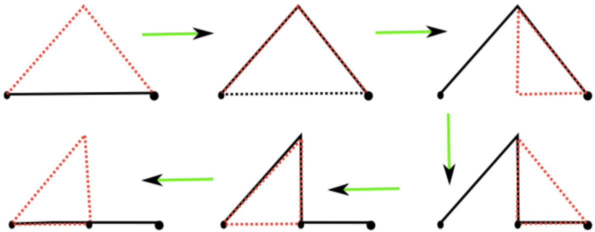


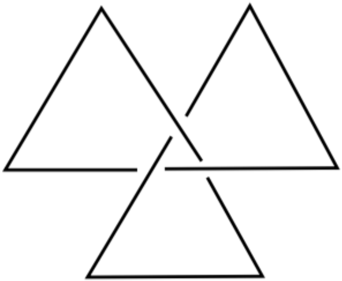
Este cambio se llama Δ-movida
(y su inversa $\bar{\Delta}$-movida)

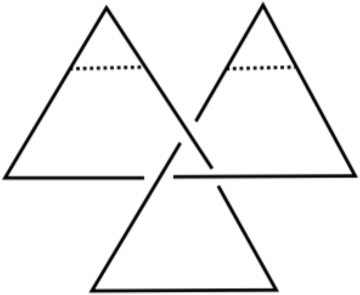
Definición

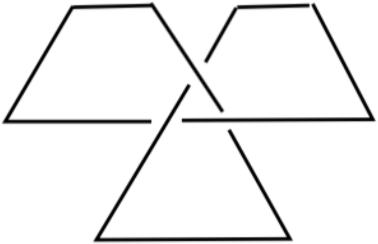
Dos nudos K y L son equivalentes (son el mismo) si uno se puede llevar al otro por medio de un número finito de movidas Δ y $\bar{\Delta}$. Lo denotaremos por $K \sim L$.

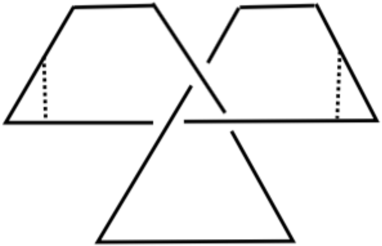
una arista a dos aristas

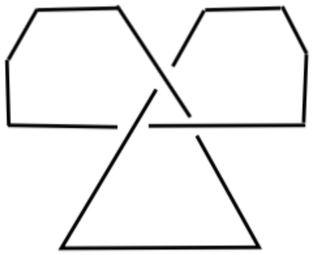


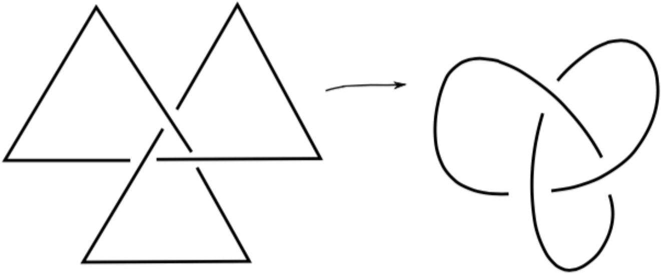






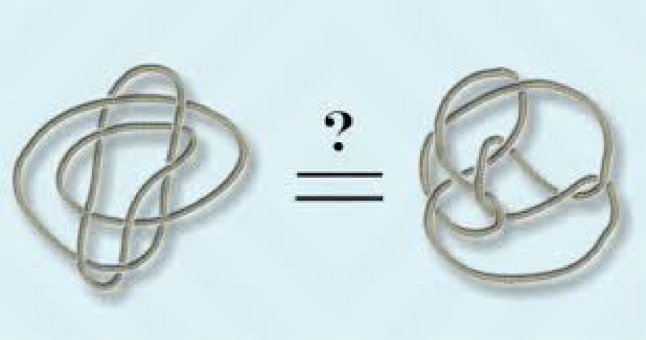






Un nudo es posible obtenerlo con un inmenso (finito) número de segmentos de recta. (poligonal equivalente a suave)

Par de Perko



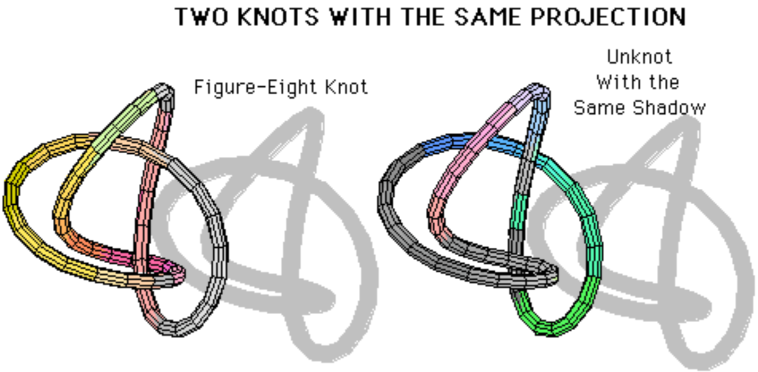
En apariencia estos nudos son distintos. Durante mucho tiempo (100 años) eso se creyó, hasta que en 1973 Perko, demostró que eran iguales. Y lo hizo a mano....

Proyección de un nudo

No es fácil manipular un nudo en el espacio.

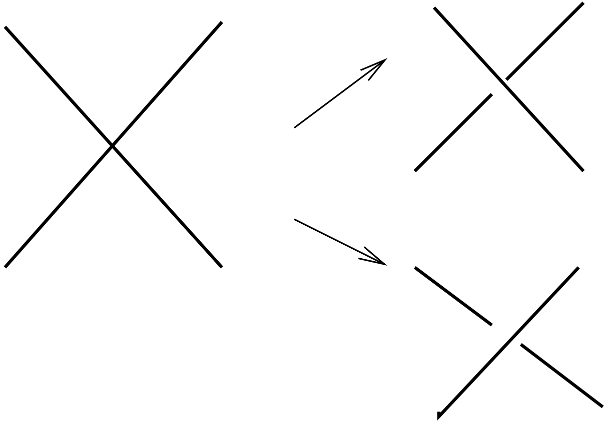
Vamos a usar dibujos en el plano que nos sirvan a recuperar el objeto tridimensional.

Proyectamos el nudo en un plano:

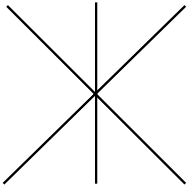


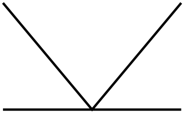
Necesitamos algo más.

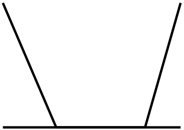
Indicar en los puntos de cruce qué puntos están más cerca o más lejos del plano de proyección. (por arriba o por abajo).



Prohibimos:





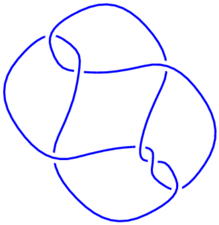


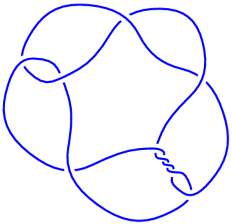
Proyección regular

Una proyección de un nudo K es regular si solo tiene un número finito de puntos dobles y si ningún vértice se proyecta sobre otro punto.

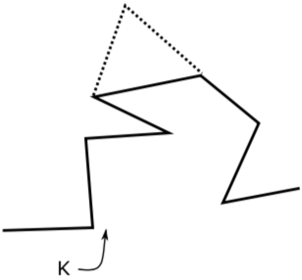
Diagrama de un nudo

Un diagrama de un nudo K es una proyección regular con información en cada punto doble que indica cual punto pasa por abajo y cual por abajo.

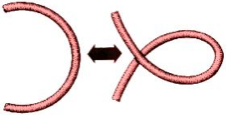




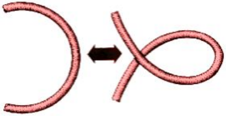
¿Cómo se ven las Δ-movidas en las proyecciones?



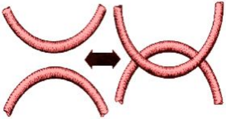
En un pedacito del diagrama de un nudo puede pasar que:

Tipo I 

En un pedacito del diagrama de un nudo puede pasar que:

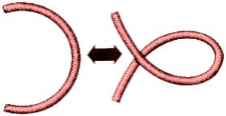


Tipo I

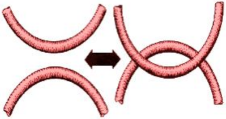


Tipo II

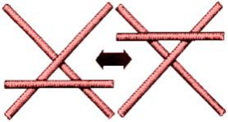
En un pedacito del diagrama de un nudo puede pasar que:



Tipo I



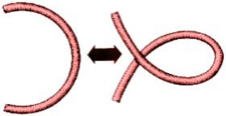
Tipo II



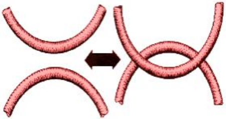
Tipo III

Y solo eso puede pasar.

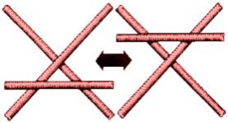
Movidas de Reidemeister



Tipo I



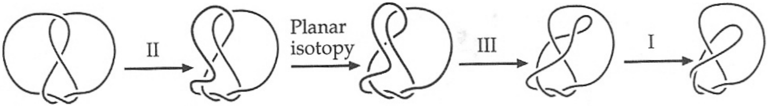
Tipo II



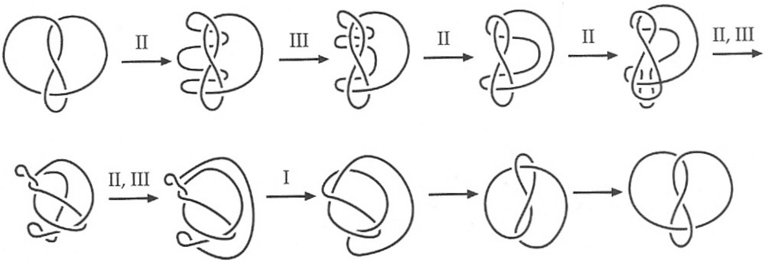
Tipo III

DEFINICION: Dos diagramas que difieren por un número finito de movidas de Reidemeister, decimos que son diagramas equivalentes.

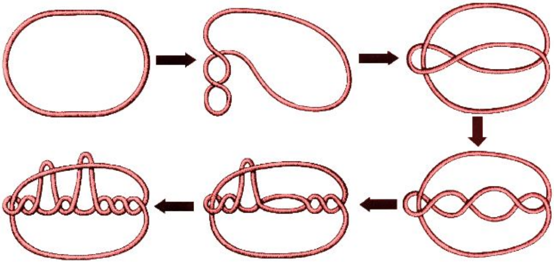
Ejemplo:



Otro ejemplo:



Y otro:

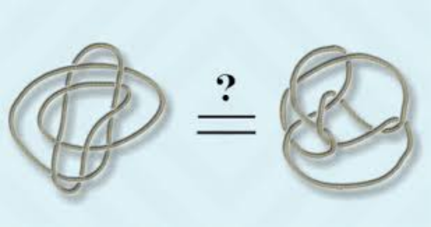


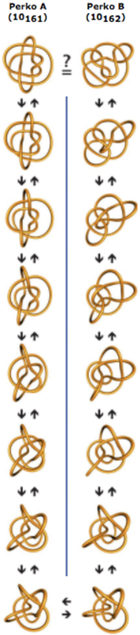
Teorema de Reidemeister

Sean K_1 y K_2 dos nudos con diagramas D_1 y D_2 respectivamente. K_1 y K_2 son equivalentes si y solo D_1 y D_2 son equivalentes.

Es un super teorema, pero no nos dice cual es la sucesión de movidas de Reidemeister.

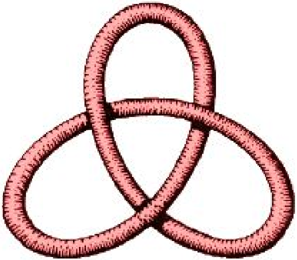
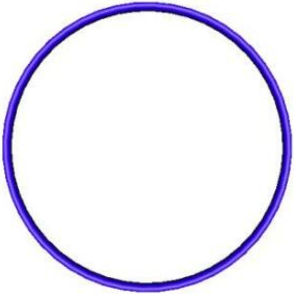
Este proceso puede llevar mucho tiempo. Como ocurrió con el par de Perko.




Perko A
(10_{161})
Perko B
(10_{162})
?
=

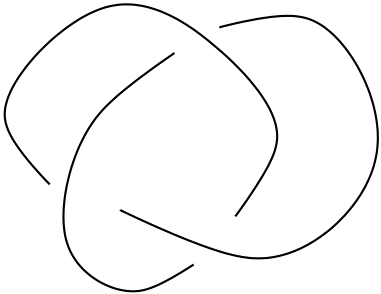
El caso es que SI sabemos como hacerle para saber si dos nudos son el mismo.
¿Cómo hacemos para saber si dos K_1 y K_2 nudos no son equivalentes?

¿Cómo sabemos que

son distintos?
Tendríamos que demostrar que por mas que deformemos al trébol sin romperlo no lo podemos desanudar.
O bien que ninguna sucesión de movidas de Reidemeister puede llevar el diagrama del trébol a el diagrama del nudo trivial.

Vamos a tomar un diagrama de un nudo K:



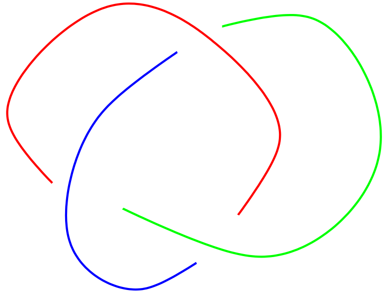
Y tres colores: rojo; verde y azul

El diagrama de un nudo K se puede tricolorear si podemos pintar cada arco de modo que:

1. En cada cruce hay exactamente un color o hay exactamente tres colores distintos, y
2. Se usan los tres colores (todos).

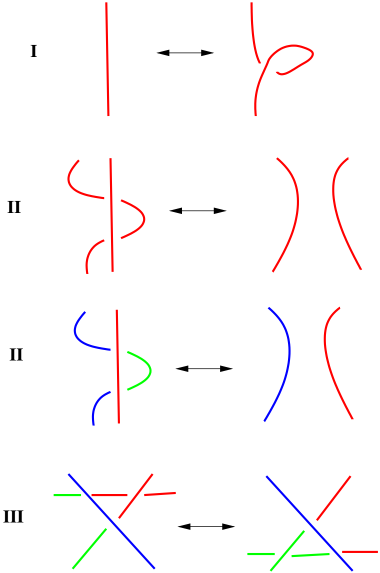
¿Se puede tricolorear un diagrama del trébol?

¿Se puede tricolorear un diagrama del trébol?



Un nudo K es **tricoloreable** si alguno de sus diagramas se puede tricolorear.

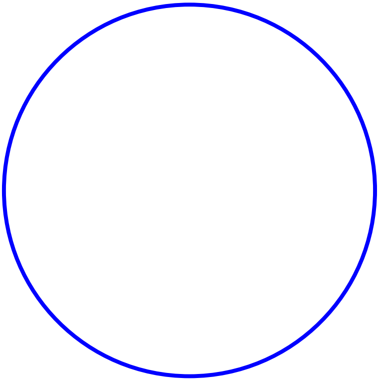
Si un diagrama de K puede ser tricoloreado entonces todos sus diagramas son tricoloreados.



Si dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes y digamos que K_1 es tricoloreable, entonces K_2 es tricoloreable también.

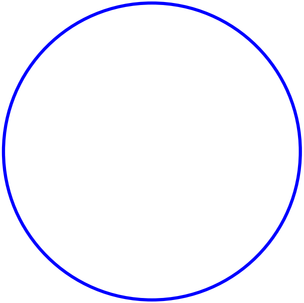
Podemos dividir los nudos en tricoloreables y los no tricoloreables.

¿Es el nudo trivial tricoloreable?

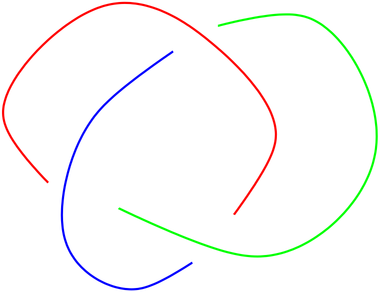


NO

Así que:



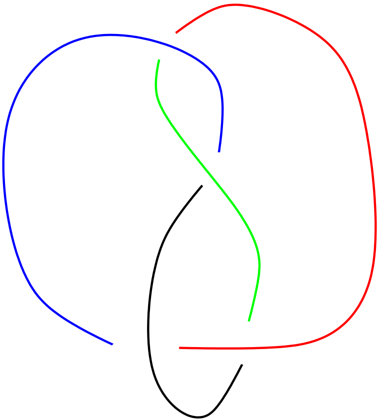
y



Son distintos.

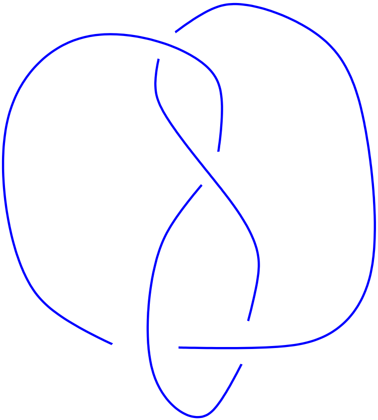
Veamos si el nudo Ocho es tricoloreable;

Veamos si el nudo Ocho es tricoloreable;



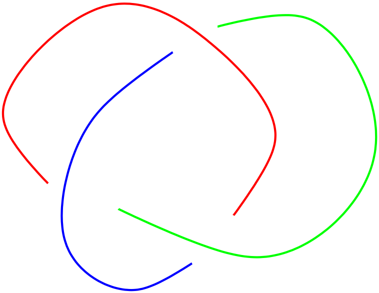
Lo podemos componer:

Lo podemos componer:

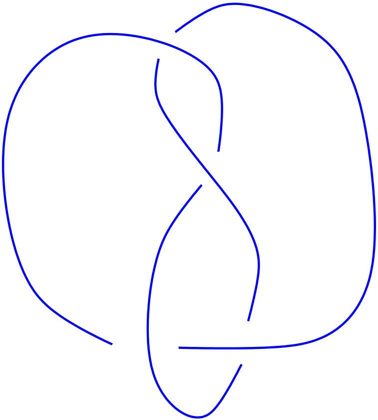


Pero solo usamos UN color.... El nudo ocho NO es tricoloreable.

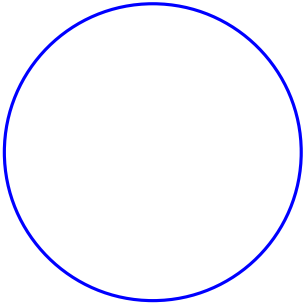
Entonces el nudo trébol y el ocho no son el mismo nudo:

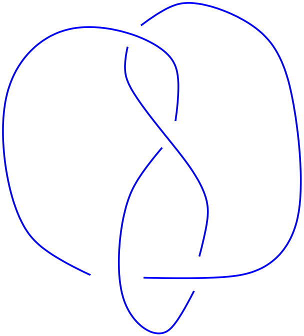


$\neq$

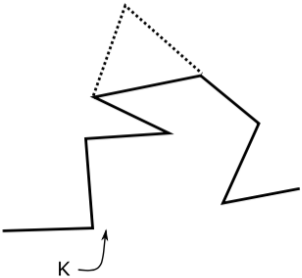


¿Y qué podemos decir del Ocho y el trivial?

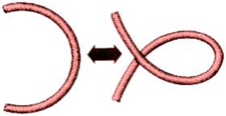




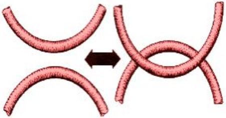
Necesitamos encontrar otra propiedad de los nudos que permanezca intacta al deformar el nudo.



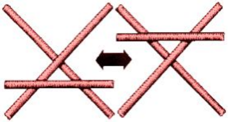
O bien, una propiedad de diagramas de nudos que permanezca intacta al aplicar las movidas:



Tipo I



Tipo II

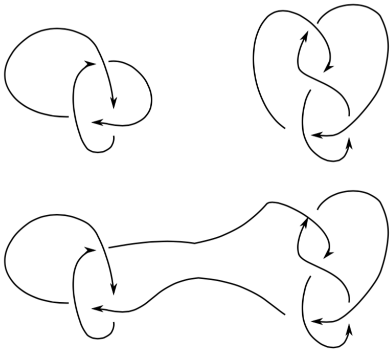


Tipo III

Tales propiedades se llaman INVARIANTES de nudos.
Y en este curso aprenderemos algunos de ellos.

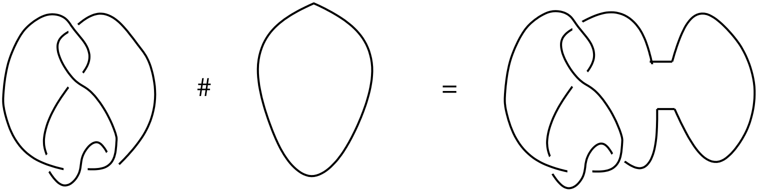
Suma conexa de nudos

Dados dos nudos K_1 y K_2 podemos obtener un nuevo nudo $K = K_1 \sharp K_2$, llamado nudo compuesto, mediante una operación llamada suma conexa.

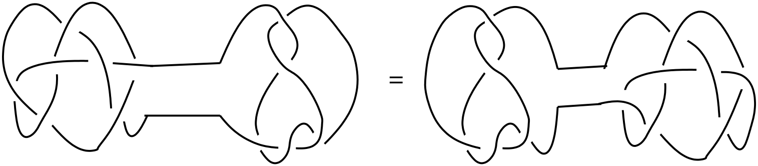


Propiedades de la suma conexa

Hay un elemento identidad, el nudo trivial

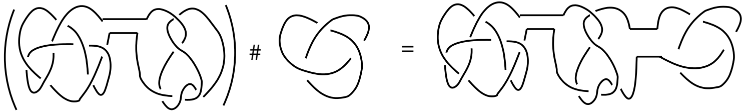


Es conmutativa

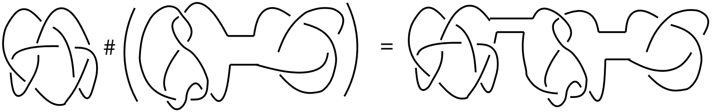


K # L = L # K

Es asociativa



(K # L) # M = K # L # M



K # (L # M) = K # L # M

No hay elemento inverso.

Dados dos nudos y sus respectivos invariantes:

$$K_1 \to P(K_1)$$
$$K_2 \to P(K_2)$$
$$K = K_1 \sharp K_2 \to P(K)$$

Es natural preguntarse si habrá una relación entre $P(K), P(K_1), P(K_2)$.
Si P es un invariante numérico, esto se traduce en:

$$¿P(K) = P(K_1) + P(K_2)?$$

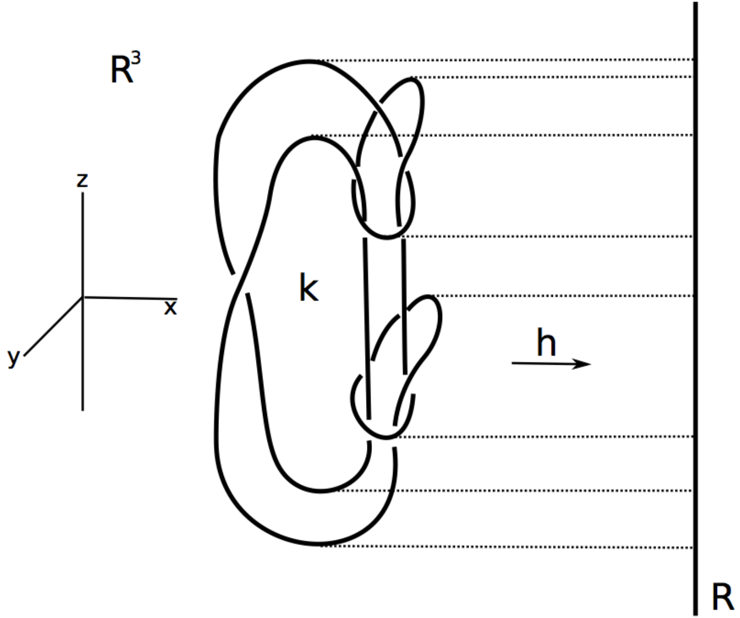
Dia 2

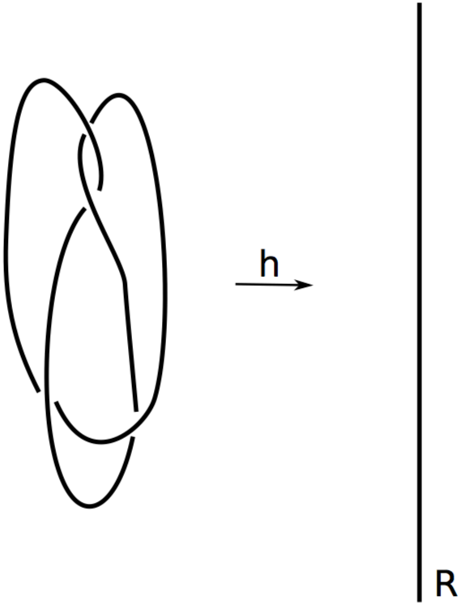
Número de puentes

Tomemos K un nudo en $\mathbb{R}^3$.
Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función altura estándar $h(x, y, z) = z$.
De tal manera que $h|k$ es una función de Morse.
O sea que; $h|k$ es una función diferenciable que solo tiene puntos críticos no degenerados.

1. $h|k$ solo tiene un número finito de puntos críticos.
2. Si p, q son puntos críticos, entonces $h(p) \neq h(q)$.
3. $h|k$ solo son máximos y mínimos.

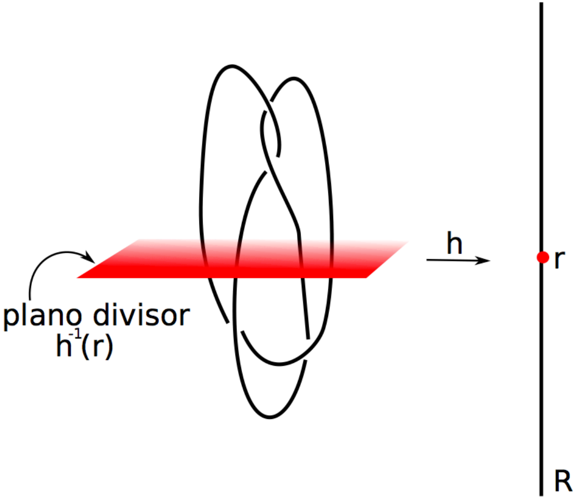
Nudo en posición de Morse




h
R

Posición de puentes

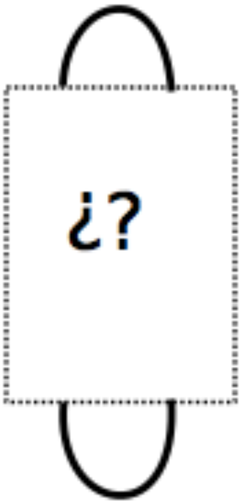
Si una posición de Morse para un nudo k es tal que vemos todos los máximos por arriba de todos los mínimos, decimos que es una posición de puentes para k.

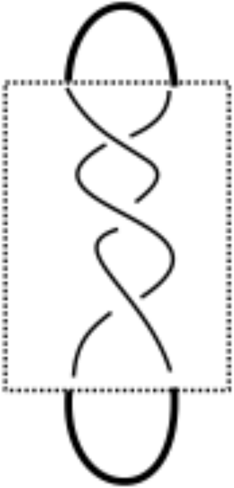


El número de puentes de una posición de puentes es el número de máximos.
El número de puentes de un nudo k es el mínimo número de puentes sobre todas las posiciones de puentes para k. Se denota por $b(k)$.
La posición de puente que realiza $b(k)$ se llama posición de puentes mínima.

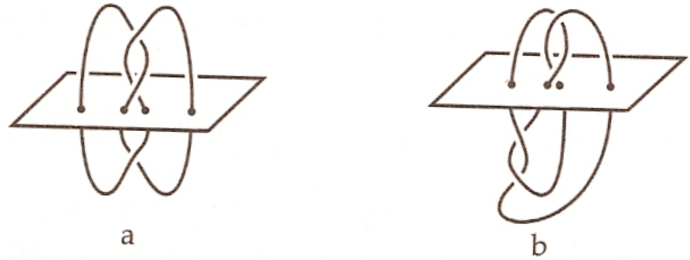
El número de puentes del nudo trivial es **1**.

Y es el único nudo con número de puentes 1.





Mientras que el trébol y el nudo ocho tienen número de puente dos:



Corolario: Estos nudos no son el trivial.

Los nudos con número de puentes 2 ya están clasificados.

Número de puentes y suma conexa

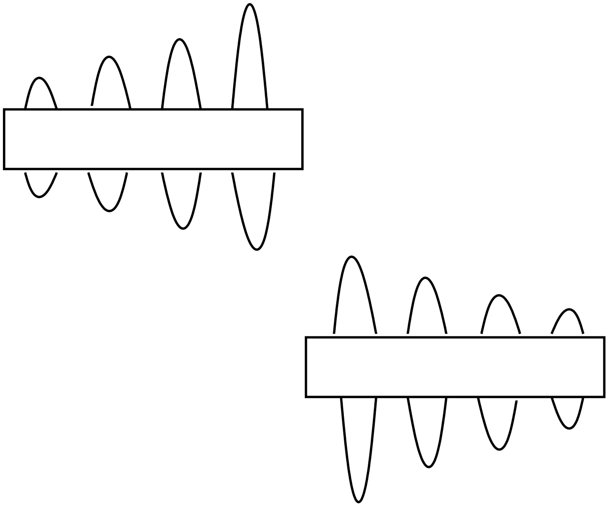
¿Cómo se comporta el número de puentes bajo suma conexa? Dados dos nudos k_1 y k_2 y si conozco $b(k_1)$ y $b(k_2)$, ¿que podemos decir de $b(k_1 \sharp k_2)$?
Schubert (1954) introdujo la noción de número de puentes y también demostró:

$$b(K_1 \sharp K_2) = b(K_1) + b(K_2) - 1$$

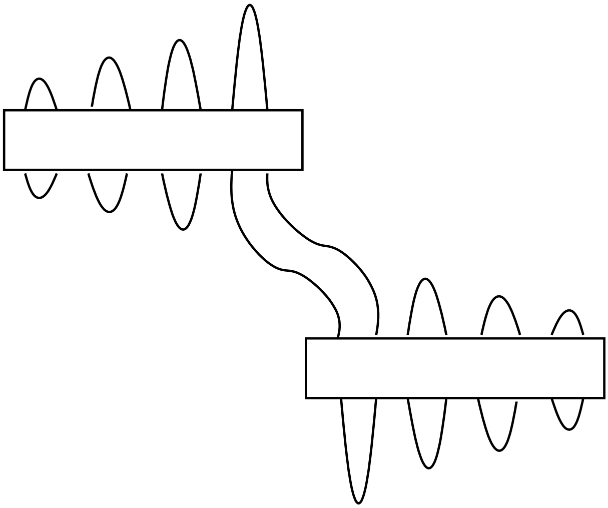
La desigualdad fácil:

$b(K_1 \sharp K_2) \leq b(K_1) + b(K_2) - 1$

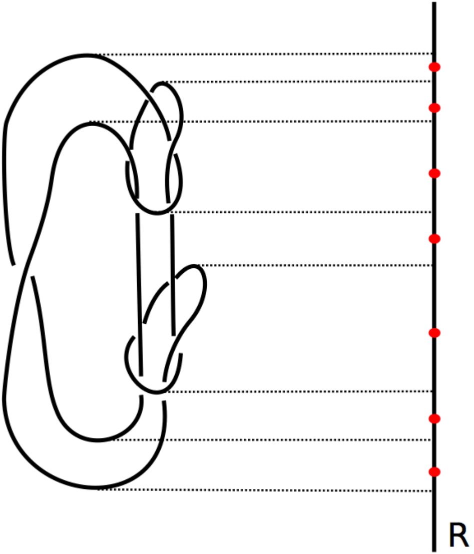
Sean dos nudos en posición de puentes.



La suma conexa:



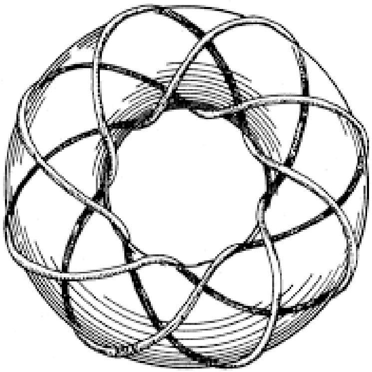
Cualquier nudo k en posición de Morse, se puede poner en posición de puentes.



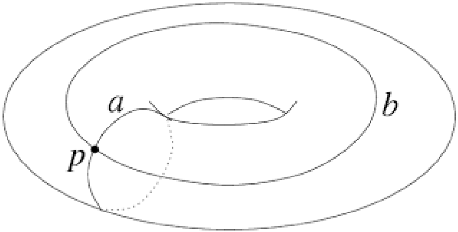
Dia 3


みさき陸橋通り
陸橋通り

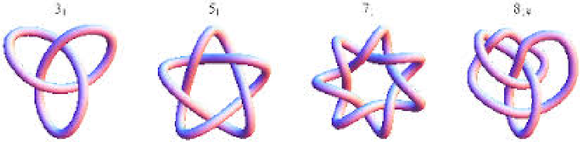
Nudos toroidales



Sea a meridiano y b longitud del toro.



Sean p, q primos relativos, un nudo toroidal $T(p, q)$ es una curva simple cerrada sobre el toro tal que cruza p-veces a la longitud b y q-veces al meridiano a



$b(T(p,q)) = \min\{p, q\}$

To see that $b(K) \leq min\{p, q\}$, consider Figure 4. *q.e.d.*

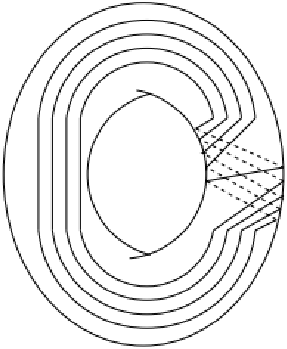


Figure 4: *A realization of the bridge number of the* $(5, 4)$*-torus knot*

(g,b)-descomposición para nudos

Sean g, b enteros no negativos con $(g, b) \neq (0, 0)$.
Decimos que un nudo K en S^3 tiene una (g, b)-descomposición, si existe una descomposición de Heegaard (V_1, V_2) de S^3 tal que K interseca a cada cubo con asas en b-arcos triviales.

(g,b)-descomposición para nudos

Sean g, b enteros no negativos con $(g, b) \neq (0, 0)$.
Decimos que un nudo K en S^3 tiene una (g, b)-descomposición, si existe una descomposición de Heegaard (V_1, V_2) de S^3 tal que K interseca a cada cubo con asas en b-arcos triviales.
En particular si $g = 0$ entonces una $(0, b)$-descomposición es la posición de puentes de Schubert.
Doll 1992, A generalized bridge number for links in 3-manifolds.

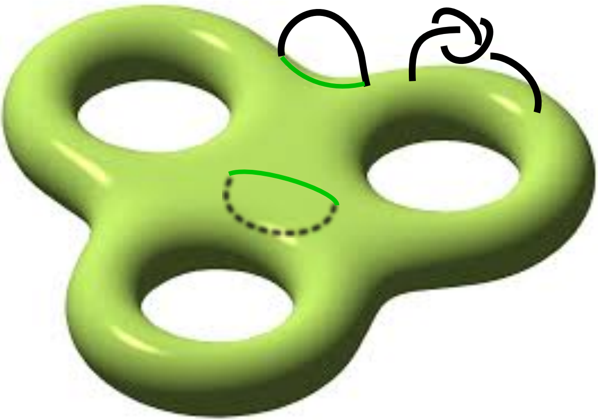
Cubo con g-asas:

$V = \text{3-bola} \cup \{D_i^2 \times [0,1]\}_{i=1}^{g}$.

Descomposiciones de Heegaard de S^3

Sean V_1, V_2 cubos con g-asas:
$S^3 = V_1 \cup_h V_2$
con h un homeomorfismo que envía los meridianos de V_1 a las los longitudes de V_2.

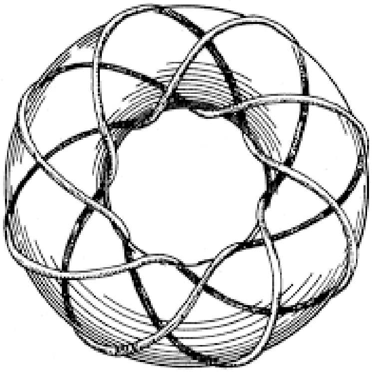
arcos triviales en un cubo con asas



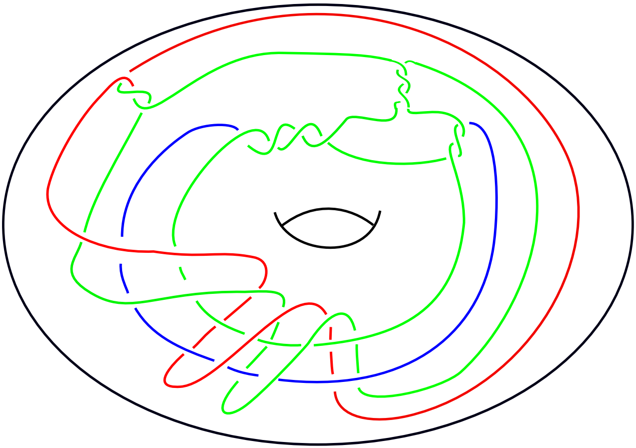
(g,b)-descomposición para nudos

Sean g, b enteros no negativos con $(g, b) \neq (0, 0)$.
Decimos que un nudo K en S^3 tiene una (g, b)-descomposición, si existe una descomposición de Heegaard (V_1, V_2) de S^3 tal que K interseca a cada cubo con asas en b-arcos triviales.
El número de puentes de género g de K, se define como
$b_g(K) = \min \{b$:existe una (g, b)-descomposición para $K\}$

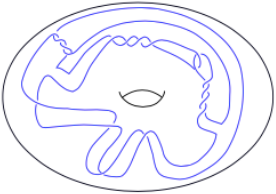
Los nudos toroidales tienen una descomposición $(1, 0)$



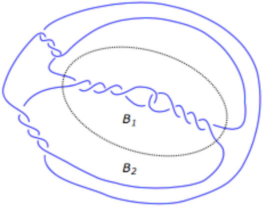
Un nudo con descomposición $(1,1)$



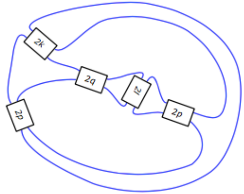
(C) (D)

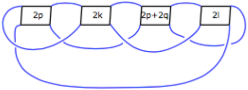


(E)



(F)





Fact 1 (1) *If a knot K has a $(g-1, b+1)$-decomposition, then K has a (g, b)-decomposition.*
(2) *If a knot K has a $(g, b-1)$-decomposition, then K has a (g, b)-decomposition.*

1.1. Genus g bridge conjecture. *Given an integer $g \geqq 0$ and a composite link $K_1\#K_2$ in M, there are integers $g_1, g_2 \geqq 0$ such that $g_1 + g_2 = g$ and $b_g(K_1\#K_2) = b_{g_1}(K_1) + b_{g_2}(K_2) - 1$.*

Schubert's theorem is essentially the genus 0 bridge conjecture. As stated, the conjecture is false. We'll give counterexamples for the case $g = 1$. In the counterexamples, K is either a link of two components or M is a Lens space. But the following refinement is still plausible:

1.1′. Refined genus g bridge conjecture. 1.1 *is true if $M = S^3$ and either $g = 0$ or K is connected. Otherwise*

$$b_{g_1}(K_1) + b_{g_2}(K_2) - 2 \leqq b_g(K_1\#K_2) \leqq b_{g_1}(K_1) + b_{g_2}(K_2) - 1 .$$

We will prove 1.1′ for $g = 0, 1$, or if M is an irreducible non-Haken 3-manifold of genus g. Note that in all three of these cases, one of g_1 or g_2 must be zero.

It is easy to prove one inequality in 1.1′:

1.2. Bridge inequality. *Suppose for $i = 1, 2$ we are given a link K_i in a closed orientable 3-manifold M_i and an integer $g_i \geqq$ the Heegard genus of M_i. Then*

$$b_{(g_1+g_2)}(K_1\#K_2) \leqq b_{g_1}(K_1) + b_{g_2}(K_2) - 1 .$$

Proof. For $i = 1, 2$ let T_i be a genus g_i Heegaard surface in M_i with respect to which K_i lies in bridge position with $b_{g_i}(K_i)$ bridges. Let W_i^+ and W_i^- be the handlebodies into which T_i divides M_i. Pick a point p_i of $K_i \cap T_i$. Let Δ_i^ε denote a complete set of trace disks for $K_i \cap W_i^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm$, chosen so that near p_i, $\partial\Delta_i^+ \cap T$ and $\partial\Delta_i^- \cap T$ agree. Remove a small 3-ball B_i with center p_i so that $B_i \cap T_i$ is an equator of B_i, $B_i \cap K_i$ is the axis, and $\Delta_i^+ \cup \Delta_i^-$ intersects B_- in a disk whose boundary is the union of the axis and an arc γ_i of a great circle between the poles. Then identify $\partial(M_1 \backslash B_1)$ with $\partial(M_2 \backslash B_2)$ by the natural homeomorphism that identifies the equatorial circles and identifies γ_1 and γ_2. The resulting surface T is $T_1\#T_2$, a Heegaard surface of genus $g_1 + g_2$ in $M_1\#M_2$. On each side of $T_1\#T_2$, the union of the trace disks Δ_1^ε and Δ_2^ε along γ_1 and γ_2 is a set of $b_{g_1}(K_1) + b_{g_2}(K_2) - 1$ trace disks for $K_1\#K_2$ with respect to the surface T. $\square$

The genus g bridge conjecture would easily follow from a more technical Conjecture 1.3: