Sabores de la Teoría de Números
IV. La Teoría Cuántica

Tim Gendron

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

29 junio 2017

Introducción

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales.

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$$

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$

¿Por qué?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$

¿Por qué? Pues...

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales:

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

La Teoría Algebraica de los Reales

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros.

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros. Bueno, tampoco los tienen los complejos, pero...

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros. Bueno, tampoco los tienen los complejos, pero...
- Los reales no cuentan con simetrías notriviales:

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros. Bueno, tampoco los tienen los complejos, pero...
- Los reales no cuentan con simetrías notriviales: $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = 1$.

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros. Bueno, tampoco los tienen los complejos, pero...
- Los reales no cuentan con simetrías notriviales: $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = 1$. Por otro lado, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ es enorme.

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros. Bueno, tampoco los tienen los complejos, pero...
- Los reales no cuentan con simetrías notriviales: $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = 1$. Por otro lado, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ es enorme.

Pero la razón más convincente

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros. Bueno, tampoco los tienen los complejos, pero...
- Los reales no cuentan con simetrías notriviales: $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = 1$. Por otro lado, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ es enorme.

Pero la razón más convincente es que los reales parametrizan una familia de sistemas cuánticos

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

La Teoría Algebraica de los Reales

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros. Bueno, tampoco los tienen los complejos, pero...
- Los reales no cuentan con simetrías notriviales: $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = 1$. Por otro lado, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ es enorme.

Pero la razón más convincente es que los reales parametrizan una familia de sistemas cuánticos – llamados *toros cuánticos* –

¿Que es la Teoría Cuántica de Números?

El consenso en la comunidad matemática está todavía evolucionando y hay varias propuestas rivales. En esta plática quisiera sugerir que La Teoría Cuántica de Números es:

$$\boxed{\text{La Teoría Algebraica de los Reales}}$$

¿Por qué? Pues... ya que no hay una Teoría Algebraica *Clásica* par los Reales: en particular

- Los reales no cuentan con enteros. Bueno, tampoco los tienen los complejos, pero...
- Los reales no cuentan con simetrías notriviales: $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = 1$. Por otro lado, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ es enorme.

Pero la razón más convincente es que los reales parametrizan una familia de sistemas cuánticos – llamados *toros cuánticos* – algo que veremos a continuación.

Toros Cuánticos

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle$$

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). *$\Lambda(\theta)$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). $\Lambda(\theta)$ *es denso en* $\mathbb{R}$.

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula.

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). $\Lambda(\theta)$ *es denso en* $\mathbb{R}$*.*

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula. El cociente

$$\mathbb{T}(\theta) :=$$

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). $\Lambda(\theta)$ *es denso en* $\mathbb{R}$.

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula. El cociente

$$\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\langle 1, \theta \rangle$$

Introducción
Toros Cuánticos
Toros Cuánticos
Foliaciones de Kronecker
Espacio de Moduli de Toros Cuánticos
Foliación de Anosov
Álgebras C^*
Geometría No Conmutativa
El Programa de Multiplicación Real
Invariante Modular Cuántico I
Característica Positiva
Invariante Modular Cuántico II
Campo de Clase de Hilbert
Campos de Clase de Rayos

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). $\Lambda(\theta)$ *es denso en* $\mathbb{R}$.

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula. El cociente

$$\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\langle 1, \theta \rangle$$

se llama el **toro cuántico** asociado a θ.

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). $\Lambda(\theta)$ *es denso en* $\mathbb{R}$*.*

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula. El cociente

$$\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\langle 1, \theta \rangle$$

se llama el **toro cuántico** asociado a θ.

- Su topología cociente es trivial

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). *$\Lambda(\theta)$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula. El cociente

$$\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\langle 1, \theta \rangle$$

se llama el **toro cuántico** asociado a θ.

- Su topología cociente es trivial (los únicos abiertos son $\mathbb{T}(\theta)$ y $\emptyset$)

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). *$\Lambda(\theta)$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula. El cociente

$$\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\langle 1, \theta \rangle$$

se llama el **toro cuántico** asociado a θ.

- Su topología cociente es trivial (los únicos abiertos son $\mathbb{T}(\theta)$ y $\emptyset$) por lo que las únicas funciones contínuas son las constantes.

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker)**.** $\Lambda(\theta)$ *es denso en* $\mathbb{R}$*.*

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula. El cociente

$$\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\langle 1, \theta \rangle$$

se llama el **toro cuántico** asociado a θ.

- Su topología cociente es trivial (los únicos abiertos son $\mathbb{T}(\theta)$ y $\emptyset$) por lo que las únicas funciones contínuas son las constantes.

- Así que no hay análogo obvio de la función $\wp$ de Weierstrass

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos el grupo

$$\Lambda = \langle 1, \theta \rangle \subset \mathbb{R}.$$

Teorema (Kronecker). $\Lambda(\theta)$ *es denso en* $\mathbb{R}$*.*

Sigue que $\Lambda(\theta)$ no es retícula. El cociente

$$\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\langle 1, \theta \rangle$$

se llama el **toro cuántico** asociado a θ.

- Su topología cociente es trivial (los únicos abiertos son $\mathbb{T}(\theta)$ y $\emptyset$) por lo que las únicas funciones contínuas son las constantes.

- Así que no hay análogo obvio de la función $\wp$ de Weierstrass $\Rightarrow$ no hay (hasta este momento) una noción de *curva elíptica cuántica*.

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta) :$$

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta):$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ.

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta) :$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ.
El **espacio de hojas** de $\mathcal{F}(\theta)$

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta):$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ. El **espacio de hojas** de $\mathcal{F}(\theta)$ es

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta))$$

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta):$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ. El **espacio de hojas** de $\mathcal{F}(\theta)$ es

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) := \mathbb{T}^2/\sim,$$

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta) :$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ. El **espacio de hojas** de $\mathcal{F}(\theta)$ es

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) := \mathbb{T}^2/\sim, \quad p \sim p'$$

Foliaciones de Kronecker

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta):$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ. El **espacio de hojas** de $\mathcal{F}(\theta)$ es

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) := \mathbb{T}^2/\sim, \quad p \sim p' \Leftrightarrow \text{están en la misma hoja.}$$

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta) :$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ.
El **espacio de hojas** de $\mathcal{F}(\theta)$ es

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) := \mathbb{T}^2/\sim, \quad p \sim p' \Leftrightarrow \text{están en la misma hoja.}$$

La hoja L por 0 es un subgrupo de un parámetro en $\mathbb{T}^2$

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta) :$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ. El **espacio de hojas** de $\mathcal{F}(\theta)$ es

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) := \mathbb{T}^2/\sim, \quad p \sim p' \Leftrightarrow \text{están en la misma hoja.}$$

La hoja L por 0 es un subgrupo de un parámetro en $\mathbb{T}^2$ y tenemos

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) \cong \mathbb{T}^2/L.$$

Dado $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ recordemos la foliación de Kronecker,

$$\mathcal{F}(\theta) :$$

el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la familia de lineas de pendiente θ. El **espacio de hojas** de $\mathcal{F}(\theta)$ es

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) := \mathbb{T}^2/\sim, \quad p \sim p' \Leftrightarrow \text{están en la misma hoja.}$$

La hoja L por 0 es un subgrupo de un parámetro en $\mathbb{T}^2$ y tenemos

$$\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) \cong \mathbb{T}^2/L.$$

Teorema. $\text{Hojas}(\mathcal{F}(\theta)) \cong \mathbb{T}(\theta)$.

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Espacio de Moduli de Toros Cuánticos

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta)$

Espacio de Moduli de Toros Cuánticos

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta) \Leftrightarrow \theta \sim \eta$.

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta) \Leftrightarrow \theta \sim \eta$.

Así que el **espacio de moduli de toros cuánticos**

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta) \Leftrightarrow \theta \sim \eta$.

Así que el **espacio de moduli de toros cuánticos** es

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{qt}}$$

Espacio de Moduli de Toros Cuánticos

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta) \Leftrightarrow \theta \sim \eta$.

Así que el **espacio de moduli de toros cuánticos** es

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{qt}} := (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta) \Leftrightarrow \theta \sim \eta$.

Así que el **espacio de moduli de toros cuánticos** es

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{qt}} := (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Ya que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ actua densamente en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$,

Espacio de Moduli de Toros Cuánticos

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta) \Leftrightarrow \theta \sim \eta$.

Así que el **espacio de moduli de toros cuánticos** es

$$\text{Mod}^{\text{qt}} := (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\text{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Ya que $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ actua densamente en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, Mod^{qt} también tiene la topología cociente trivial.

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta) \Leftrightarrow \theta \sim \eta$.

Así que el **espacio de moduli de toros cuánticos** es

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{qt}} := (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Ya que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ actua densamente en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\mathrm{Mod}^{\mathrm{qt}}$ también tiene la topología cociente trivial. Es decir, no hay posibilidad definir un invariante modular cuántico

Teorema. *Sean* $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Entonces* $\mathbb{T}(\theta) \cong \mathbb{T}(\eta) \Leftrightarrow \theta \sim \eta$.

Así que el **espacio de moduli de toros cuánticos** es

$$\mathsf{Mod}^{\mathrm{qt}} := (\mathbb{R} - \mathbb{Q})/\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Ya que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$ actua densamente en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\mathsf{Mod}^{\mathrm{qt}}$ también tiene la topología cociente trivial. Es decir, no hay posibilidad definir un invariante modular cuántico como función no constante y contínuo en $\mathsf{Mod}^{\mathrm{qt}}$.

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Se puede definir la foliación de Kronecker de “μ-pendiente θ”

$$\mathcal{F}(\mu, \theta).$$

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Se puede definir la foliación de Kronecker de "μ-pendiente θ"

$$\mathcal{F}(\mu, \theta).$$

La acción

$$A \cdot (\mu, \theta)$$

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Se puede definir la foliación de Kronecker de "μ-pendiente θ"

$$\mathcal{F}(\mu, \theta).$$

La acción

$$A \cdot (\mu, \theta) := (A(\mu), A^{-T}(\theta))$$

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Se puede definir la foliación de Kronecker de "μ-pendiente θ"

$$\mathcal{F}(\mu, \theta).$$

La acción

$$A \cdot (\mu, \theta) := (A(\mu), A^{-T}(\theta))$$

reproduce la relación de isomorfismo de tales foliaciónes.

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Se puede definir la foliación de Kronecker de "μ-pendiente θ"

$$\mathcal{F}(\mu, \theta).$$

La acción

$$A \cdot (\mu, \theta) := (A(\mu), A^{-T}(\theta))$$

reproduce la relación de isomorfismo de tales foliaciónes. Entonces el **espacio de moduli de foliaciones de Kronecker**

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Se puede definir la foliación de Kronecker de "μ-pendiente θ"

$$\mathcal{F}(\mu, \theta).$$

La acción

$$A \cdot (\mu, \theta) := (A(\mu), A^{-T}(\theta))$$

reproduce la relación de isomorfismo de tales foliaciónes. Entonces el **espacio de moduli de foliaciones de Kronecker** es

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{fk}} = \Big((\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\Big) \Big/ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) :$$

una foliación del haz tangente unitario $\mathrm{T}_1^*(\mathrm{Mod})$

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Se puede definir la foliación de Kronecker de "μ-pendiente θ"

$$\mathcal{F}(\mu, \theta).$$

La acción

$$A \cdot (\mu, \theta) := (A(\mu), A^{-T}(\theta))$$

reproduce la relación de isomorfismo de tales foliaciónes. Entonces el **espacio de moduli de foliaciones de Kronecker** es

$$\mathrm{Mod}^{\mathrm{fk}} = \Big((\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\Big) \Big/ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) :$$

una foliación del haz tangente unitario $T_1^*(\mathrm{Mod})$ llamada la **foliación de Anosov**.

Sea $(\mu, \theta) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Se puede definir la foliación de Kronecker de "μ-pendiente θ"

$$\mathcal{F}(\mu, \theta).$$

La acción

$$A \cdot (\mu, \theta) := (A(\mu), A^{-T}(\theta))$$

reproduce la relación de isomorfismo de tales foliaciónes. Entonces el **espacio de moduli de foliaciones de Kronecker** es

$$\mathsf{Mod}^{\mathrm{fk}} = \Big((\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\Big) \Big/ \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}) :$$

una foliación del haz tangente unitario $\mathrm{T}_1^*(\mathsf{Mod})$ llamada la **foliación de Anosov**.

Teorema. $\mathsf{Hoja}(\mathsf{Mod}^{\mathrm{fk}}) \approx \mathsf{Mod}^{\mathrm{qt}}$.

Un **álgebra C^***

Un **álgebra** C^* es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff,

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X)$$

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

es una álgebra C^*

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

es una álgebra C^* **conmutativa**

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

es una álgebra C^* **conmutativa** donde $f^* = \bar{f}$

Un **álgebra** C^* es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

es una álgebra C^* **conmutativa** donde $f^* = \bar{f}$ (conjugación compleja).

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

es una álgebra C^* **conmutativa** donde $f^* = \bar{f}$ (conjugación compleja).

Teorema de Gelfand-Naimark. *La asociación* $X \mapsto \mathcal{C}_0(X)$

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

es una álgebra C^* **conmutativa** donde $f^* = \bar{f}$ (conjugación compleja).

Teorema de Gelfand-Naimark. *La asociación $X \mapsto \mathcal{C}_0(X)$ define un functor*

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

es una álgebra C^* **conmutativa** donde $f^* = \bar{f}$ (conjugación compleja).

Teorema de Gelfand-Naimark. *La asociación $X \mapsto \mathcal{C}_0(X)$ define un functor que da una equivalencia de categorías*

Un **álgebra C^*** es un álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ dotado con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Ejemplo. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, el espacio

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$$

es una álgebra C^* **conmutativa** donde $f^* = \bar{f}$ (conjugación compleja).

Teorema de Gelfand-Naimark. *La asociación $X \mapsto \mathcal{C}_0(X)$ define un functor que da una equivalencia de categorías*

$$\text{Esp}_{\text{compHaus}} \longrightarrow \text{Alg}C^*_{\text{con}}.$$

La **Geometría No Conmutativa**

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos*

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos –

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^*

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación,

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación, hay una construcción debido a Alain Connes.

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación, hay una construcción debido a Alain Connes.

Ejemplo. El álgebra C^* de la foliación de Kronecker $\mathcal{F}(\theta)$

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación, hay una construcción debido a Alain Connes.

Ejemplo. El álgebra C^* de la foliación de Kronecker $\mathcal{F}(\theta)$ se llama el **álgebra de rotaciones iracionales**:

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación, hay una construcción debido a Alain Connes.

Ejemplo. El álgebra C^* de la foliación de Kronecker $\mathcal{F}(\theta)$ se llama el **álgebra de rotaciones iracionales**:

$$\mathcal{A}(\theta)$$

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación, hay una construcción debido a Alain Connes.

Ejemplo. El álgebra C^* de la foliación de Kronecker $\mathcal{F}(\theta)$ se llama el **álgebra de rotaciones iracionales**:

$$\mathcal{A}(\theta) := \langle X, Y | XY = e^{2\pi i\theta} YX \rangle_{C^*}.$$

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación, hay una construcción debido a Alain Connes.

Ejemplo. El álgebra C^* de la foliación de Kronecker $\mathcal{F}(\theta)$ se llama el **álgebra de rotaciones iracionales**:

$$\mathcal{A}(\theta) := \langle X, Y | XY = e^{2\pi i \theta} Y X \rangle_{C^*}.$$

Hay un diccionario parcial que asocia a ciertos conceptos geométricos

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación, hay una construcción debido a Alain Connes.

Ejemplo. El álgebra C^* de la foliación de Kronecker $\mathcal{F}(\theta)$ se llama el **álgebra de rotaciones iracionales**:

$$\mathcal{A}(\theta) := \langle X, Y | XY = e^{2\pi i\theta} YX \rangle_{C^*}.$$

Hay un diccionario parcial que asocia a ciertos conceptos geométricos contrapartes en la categoría de álgebras C^*:

La **Geometría No Conmutativa** es el estudio de extensiones del functor de Gelfand-Naimark a *espacios no conmutativos* – e.g.cocientes malos – al asociarles álgebras C^* **no conmutativas**.

- No hay manera canónica hacerlas (como no hay manera canónica cuantizar un sistema mecánico clásico).
- Si un espacio no conmutativo es el espacio de hojas de una foliación, hay una construcción debido a Alain Connes.

Ejemplo. El álgebra C^* de la foliación de Kronecker $\mathcal{F}(\theta)$ se llama el **álgebra de rotaciones iracionales**:

$$\mathcal{A}(\theta) := \langle X, Y | XY = e^{2\pi i\theta} YX \rangle_{C^*}.$$

Hay un diccionario parcial que asocia a ciertos conceptos geométricos contrapartes en la categoría de álgebras C^*: pero es un diccionario incompleto.

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático,

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**:

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta))$$

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004)**.** *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales*

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K .$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004)**.** *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter,*

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004). *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter, usando toros cuánticos con MR*

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004). *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter, usando toros cuánticos con MR en lugar de curvas elípticas con MC.*

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004). *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter, usando toros cuánticos con MR en lugar de curvas elípticas con MC.*

Manin esperaba la necesidad trabajar con los álgebras de rotaciones iracionales $\mathcal{A}(\theta)$,

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004). *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter, usando toros cuánticos con MR en lugar de curvas elípticas con MC.*

Manin esperaba la necesidad trabajar con los álgebras de rotaciones iracionales $\mathcal{A}(\theta)$, pero hay un problema serio con este acercamiento:

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004). *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter, usando toros cuánticos con MR en lugar de curvas elípticas con MC.*

Manin esperaba la necesidad trabajar con los álgebras de rotaciones iracionales $\mathcal{A}(\theta)$, pero hay un problema serio con este acercamiento: **NO** hay una nocion de π_1 para álgebras C^*

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004). *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter, usando toros cuánticos con MR en lugar de curvas elípticas con MC.*

Manin esperaba la necesidad trabajar con los álgebras de rotaciones iracionales $\mathcal{A}(\theta)$, pero hay un problema serio con este acercamiento: **NO** hay una nocion de π_1 para álgebras C^* (para construir series de Eisenstein, funciones $\wp$, etc.)

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004)**.** *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter, usando toros cuánticos con MR en lugar de curvas elípticas con MC.*

Manin esperaba la necesidad trabajar con los álgebras de rotaciones iracionales $\mathcal{A}(\theta)$, pero hay un problema serio con este acercamiento: **NO** hay una nocion de π_1 para álgebras C^* (para construir series de Eisenstein, funciones $\wp$, etc.)

Nota. La seudo-retícula $\langle 1, \theta \rangle$ no sirve par este propósito

El Programa de Multiplicación Real

Si $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es cuadrático, $\mathbb{T}(\theta)$ tiene **Multiplicacion Real**: si $K = \mathbb{Q}(\theta)$

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(\mathbb{T}(\theta)) \subset \mathcal{O}_K.$$

Programa de Multiplicación Real (Manin, 2004)**.** *Solucionar el 12 Problema de Hilbert en el caso de extensiones cuadráticas reales en el estilo de Weber-Fueter, usando toros cuánticos con MR en lugar de curvas elípticas con MC.*

Manin esperaba la necesidad trabajar con los álgebras de rotaciones iracionales $\mathcal{A}(\theta)$, pero hay un problema serio con este acercamiento: **NO** hay una nocion de π_1 para álgebras C^* (para construir series de Eisenstein, funciones $\wp$, etc.)

Nota. La seudo-retícula $\langle 1, \theta \rangle$ no sirve par este propósitosiendo denso, sumas sobre sus elementos producen ∞.

Invariante Modular Cuántico I

Sea $\theta \in \mathbb{R}$.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta)$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\| =$ distancia de x al entero más cercano.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\| =$ distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k)$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\|$ = distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-k}.$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\| =$ distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-k}.$$

Sea

$$j_\varepsilon(\theta)$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \;:\; \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\| =$ distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-k}.$$

Sea

$$j_\varepsilon(\theta) = \frac{12^3}{1 - \frac{49}{40} J_\varepsilon(\theta)},$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\|$ = distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-k}.$$

Sea

$$j_\varepsilon(\theta) = \frac{12^3}{1 - \frac{49}{40} J_\varepsilon(\theta)}, \quad J_\varepsilon(\theta) = \frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

Definición

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\| =$ distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-k}.$$

Sea

$$j_\varepsilon(\theta) = \frac{12^3}{1 - \frac{49}{40} J_\varepsilon(\theta)}, \quad J_\varepsilon(\theta) = \frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El **invariante modular cuántico**

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\| =$ distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-k}.$$

Sea

$$j_\varepsilon(\theta) = \frac{12^3}{1 - \frac{49}{40} J_\varepsilon(\theta)}, \quad J_\varepsilon(\theta) = \frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El **invariante modular cuántico** es la función **multi-valuada**

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\| =$ distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-k}.$$

Sea

$$j_\varepsilon(\theta) = \frac{12^3}{1 - \frac{49}{40}J_\varepsilon(\theta)}, \quad J_\varepsilon(\theta) = \frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El **invariante modular cuántico** es la función **multi-valuada**

$$j^{\mathrm{qt}} : \mathbb{R}/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) = \{n \in \mathbb{Z} \;:\; \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

donde $\|x\| =$ distancia de x al entero más cercano. La **ε función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(k) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-k}.$$

Sea

$$j_\varepsilon(\theta) = \frac{12^3}{1 - \frac{49}{40}J_\varepsilon(\theta)}, \quad J_\varepsilon(\theta) = \frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El **invariante modular cuántico** es la función **multi-valuada**

$$j^{\mathrm{qt}} : \mathbb{R}/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad j^{\mathrm{qt}}(\theta) = \lim_{\varepsilon\to 0} j_\varepsilon(\theta).$$

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real,

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental.

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental. (Es entero por que satisface $X^2 = X + 1$

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental. (Es entero por que satisface $X^2 = X + 1$ y su reciproco,

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^{\times} \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental. (Es entero por que satisface $X^2 = X + 1$ y su reciproco, $(\sqrt{5}-1)/2$,

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental. (Es entero por que satisface $X^2 = X + 1$ y su reciproco, $(\sqrt{5}-1)/2$, es entero también.)

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental. (Es entero por que satisface $X^2 = X + 1$ y su reciproco, $(\sqrt{5}-1)/2$, es entero también.)

Un **discriminante fundamental** para K

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental. (Es entero por que satisface $X^2 = X + 1$ y su reciproco, $(\sqrt{5}-1)/2$, es entero también.)

Un **discriminante fundamental** para K es $D \in \mathbb{N}$ con $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental. (Es entero por que satisface $X^2 = X + 1$ y su reciproco, $(\sqrt{5}-1)/2$, es entero también.)

Un **discriminante fundamental** para K es $D \in \mathbb{N}$ con $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ y

$$D \equiv 0, 1 \mod 4.$$

Unidades y Discriminantes Fundamentales

Si $K/\mathbb{Q}$ es cuadrática y real, por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Un generador θ del factor libre se llama **unidad fundamental**.

Ejemplo. La razón áurea $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es unidad fundamental. (Es entero por que satisface $X^2 = X + 1$ y su reciproco, $(\sqrt{5}-1)/2$, es entero también.)

Un **discriminante fundamental** para K es $D \in \mathbb{N}$ con $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ y

$$D \equiv 0, 1 \mod 4.$$

Los primeros discriminantes fundamentales son

$$D = 5, 7, 8, 11, 12, \ldots$$

Experimentos usando el programa PARI-GP

Experimentos usando el programa PARI-GP sugieren que para θ una unidad fundamental cuadrática

Experimentos

Experimentos usando el programa PARI-GP sugieren que para θ una unidad fundamental cuadrática con discriminante fundamental D,

Experimentos usando el programa PARI-GP sugieren que para θ una unidad fundamental cuadrática con discriminante fundamental D,

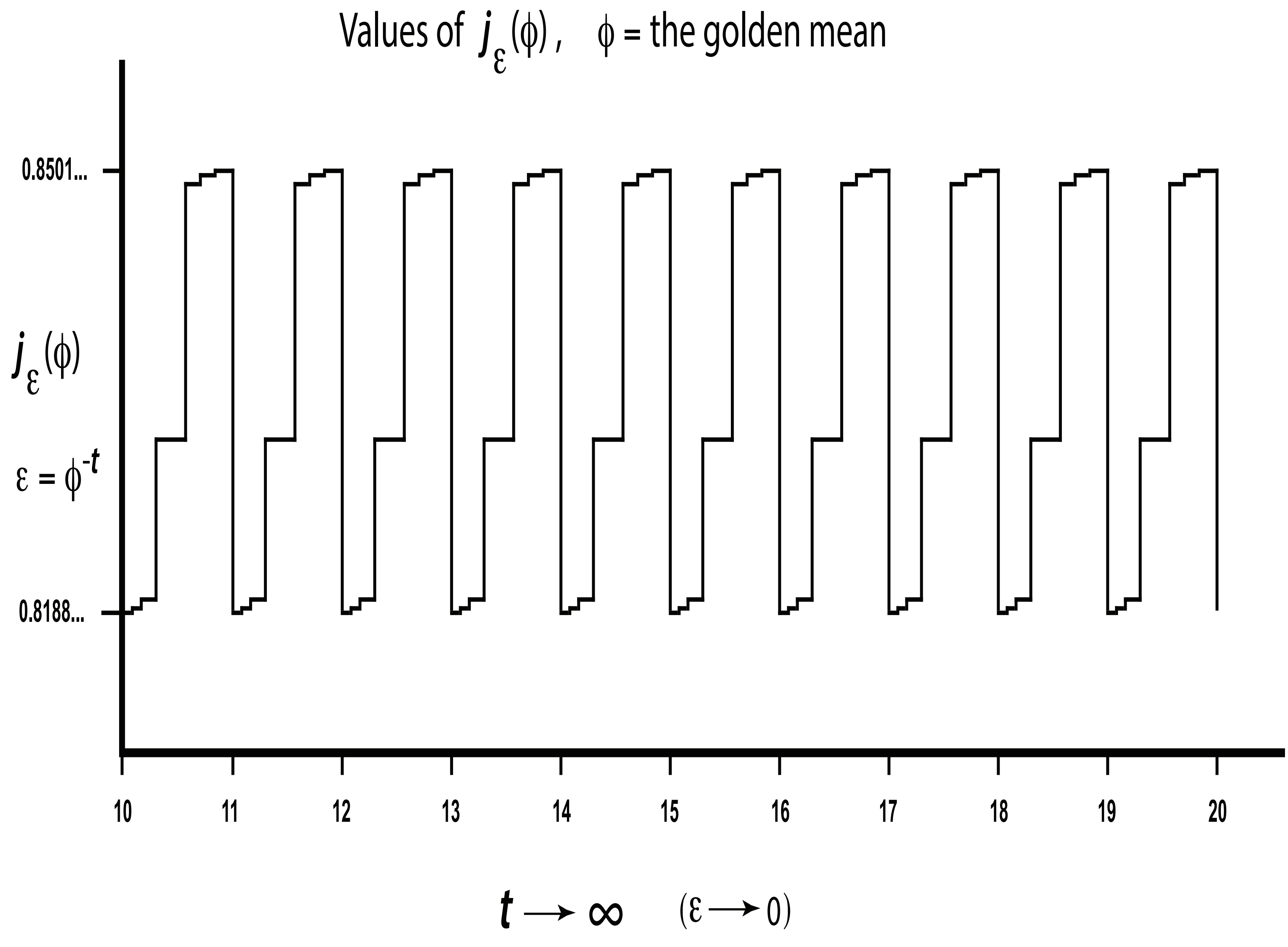
- $\{j_\varepsilon(\theta)\}_{\varepsilon<1}$ es un conjunto finito con D valores.

Experimentos usando el programa PARI-GP sugieren que para θ una unidad fundamental cuadrática con discriminante fundamental D,

- $\{j_\varepsilon(\theta)\}_{\varepsilon<1}$ es un conjunto finito con D valores.
- Para todo ε,

Experimentos usando el programa PARI-GP sugieren que para θ una unidad fundamental cuadrática con discriminante fundamental D,

- $\{j_\varepsilon(\theta)\}_{\varepsilon<1}$ es un conjunto finito con D valores.
- Para todo ε, $j_\varepsilon(\theta) \neq \infty$.



Values of $j_\varepsilon(\phi)$, ϕ = the golden mean
0.8501...
0.8188...
$j_\varepsilon(\phi)$
$\varepsilon = \phi^{-t}$
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
$t \longrightarrow \infty$ $(\varepsilon \longrightarrow 0)$

Definimos la norma esperanza:

Definimos la norma esperanza:

$$\mathsf{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta))$$

Definimos la norma esperanza:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta)) := \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)} \alpha^{p_\alpha}$$

Definimos la norma esperanza:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta)) := \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)} \alpha^{p_\alpha}$$

donde p_α es la probabilidad (multiplicativa) de $\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)$.

Definimos la norma esperanza:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta)) := \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)} \alpha^{p_\alpha}$$

donde p_α es la probabilidad (multiplicativa) de $\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)$.

Conjetura. *Sea* $\theta \in \mathbb{R}$ *cuadrático,* $K = \mathbb{Q}(\theta)$.

Definimos la norma esperanza:

$$\mathsf{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta)) := \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)} \alpha^{p_\alpha}$$

donde p_α es la probabilidad (multiplicativa) de $\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)$.

Conjetura. *Sea* $\theta \in \mathbb{R}$ *cuadrático,* $K = \mathbb{Q}(\theta)$*. Entonces* $\# j^{\mathrm{qt}}(\theta) = D$

Definimos la norma esperanza:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta)) := \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)} \alpha^{p_\alpha}$$

donde p_α es la probabilidad (multiplicativa) de $\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)$.

Conjetura. *Sea* $\theta \in \mathbb{R}$ *cuadrático,* $K = \mathbb{Q}(\theta)$. *Entonces* $\#j^{\mathrm{qt}}(\theta) = D$ *y*

$$H_K = K(\mathrm{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta))).$$

Definimos la norma esperanza:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta)) := \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)} \alpha^{p_\alpha}$$

donde p_α es la probabilidad (multiplicativa) de $\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)$.

Conjetura. *Sea* $\theta \in \mathbb{R}$ *cuadrático,* $K = \mathbb{Q}(\theta)$. *Entonces* $\# j^{\mathrm{qt}}(\theta) = D$ *y*

$$H_K = K(\mathrm{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta))).$$

En lo que sigue discutimos la prueba de esta conjetura en **característica positiva**.

Definimos la norma esperanza:

$$\mathsf{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta)) := \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)} \alpha^{p_\alpha}$$

donde p_α es la probabilidad (multiplicativa) de $\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(\theta)$.

Conjetura. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$ cuadrático, $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Entonces $\#j^{\mathrm{qt}}(\theta) = D$ y*

$$H_K = K(\mathsf{N}_{\mathrm{esp}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta))).$$

En lo que sigue discutimos la prueba de esta conjetura en **característica positiva**.

[1] Castaño Bernard, C. & Gendron, T.M., Modular invariant of quantum tori. *Proc. Lond. Math. Soc.* **109** (2014), Issue 4, 1014–1049.

Característica Positiva

Sea $q = p^n$, p primo.

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo* $\mathbb{F}$ *con* $\#\mathbb{F} = q$.

Campos de Funciones sobre un Campo Finito

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Campos de Funciones sobre un Campo Finito

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $q = 4$, tomamos la extension cuadrática de $\mathbb{F}_2$ definida por $f(X) = X^2 + X + 1$, *etc.*

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $q = 4$, tomamos la extension cuadrática de $\mathbb{F}_2$ definida por $f(X) = X^2 + X + 1$, *etc.*

Fijamos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $q = 4$, tomamos la extension cuadrática de $\mathbb{F}_2$ definida por $f(X) = X^2 + X + 1$, *etc.*

Fijamos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ y sea

$$\mathbb{F}(T)$$

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $q = 4$, tomamos la extension cuadrática de $\mathbb{F}_2$ definida por $f(X) = X^2 + X + 1$, *etc.*

Fijamos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ y sea

$$\mathbb{F}(T) = \{f(T)/g(T) : \ f(T), g(T) \in \mathbb{F}[T]\},$$

Campos de Funciones sobre un Campo Finito

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $q = 4$, tomamos la extension cuadrática de $\mathbb{F}_2$ definida por $f(X) = X^2 + X + 1$, *etc.*

Fijamos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ y sea

$$\mathbb{F}(T) = \{f(T)/g(T) : \ f(T), g(T) \in \mathbb{F}[T]\},$$

un campo de **característica** $p > 0$:

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $q = 4$, tomamos la extension cuadrática de $\mathbb{F}_2$ definida por $f(X) = X^2 + X + 1$, *etc.*

Fijamos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ y sea

$$\mathbb{F}(T) = \{f(T)/g(T) : \ f(T), g(T) \in \mathbb{F}[T]\},$$

un campo de **característica** $p > 0$: $px = 0$ para cada $x \in \mathbb{F}(T)$.

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $q = 4$, tomamos la extension cuadrática de $\mathbb{F}_2$ definida por $f(X) = X^2 + X + 1$, *etc.*

Fijamos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ y sea

$$\mathbb{F}(T) = \{f(T)/g(T) : \ f(T), g(T) \in \mathbb{F}[T]\},$$

un campo de **característica** $p > 0$: $px = 0$ para cada $x \in \mathbb{F}(T)$. Una extensión finita

$$K/\mathbb{F}(T)$$

Campos de Funciones sobre un Campo Finito

Sea $q = p^n$, p primo.

Teorema. *Existe un único campo $\mathbb{F}$ con $\#\mathbb{F} = q$.*

Ejemplo. Para $q = p$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $q = 4$, tomamos la extension cuadrática de $\mathbb{F}_2$ definida por $f(X) = X^2 + X + 1$, *etc.*

Fijamos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ y sea

$$\mathbb{F}(T) = \{f(T)/g(T) : \; f(T), g(T) \in \mathbb{F}[T]\},$$

un campo de **característica** $p > 0$: $px = 0$ para cada $x \in \mathbb{F}(T)$. Una extensión finita

$$K/\mathbb{F}(T)$$

se llama un **campo de funciones sobre un campo finito**.

1. Cada campo de funciones $K/\mathbb{F}(T)$

1. Cada campo de funciones $K/\mathbb{F}(T)$ es isomorfo a

$$\mathrm{Rac}(\Sigma_K),$$

1. Cada campo de funciones $K/\mathbb{F}(T)$ es isomorfo a

$$\mathrm{Rac}(\Sigma_K), \quad \Sigma_K = \text{ una curva sobre } \mathbb{F},$$

1. Cada campo de funciones $K/\mathbb{F}(T)$ es isomorfo a

$$\mathrm{Rac}(\Sigma_K), \quad \Sigma_K = \text{ una curva sobre } \mathbb{F},$$

donde $\mathrm{Rac}(\Sigma_K)$ = campo de funciones racionales en Σ_K.

1. Cada campo de funciones $K/\mathbb{F}(T)$ es isomorfo a

$$\mathrm{Rac}(\Sigma_K), \quad \Sigma_K = \text{ una curva sobre } \mathbb{F},$$

donde $\mathrm{Rac}(\Sigma_K)$ = campo de funciones racionales en Σ_K.

Ejemplo: $\Sigma_{\mathbb{F}(T)} = \mathbb{P}^1$ = plano proyectivo.

1. Cada campo de funciones $K/\mathbb{F}(T)$ es isomorfo a

$$\mathrm{Rac}(\Sigma_K), \quad \Sigma_K = \text{ una curva sobre } \mathbb{F},$$

donde $\mathrm{Rac}(\Sigma_K)$ = campo de funciones racionales en Σ_K.

Ejemplo: $\Sigma_{\mathbb{F}(T)} = \mathbb{P}^1$ = plano proyectivo.

2. Cada extensión finita

$$L/K$$

de campos de funciones

Geometría de Campos de Funciones

1. Cada campo de funciones $K/\mathbb{F}(T)$ es isomorfo a

$$\mathrm{Rac}(\Sigma_K), \quad \Sigma_K = \text{ una curva sobre } \mathbb{F},$$

donde $\mathrm{Rac}(\Sigma_K)$ = campo de funciones racionales en Σ_K.

Ejemplo: $\Sigma_{\mathbb{F}(T)} = \mathbb{P}^1$ = plano proyectivo.

2. Cada extensión finita

$$L/K$$

de campos de funciones se induce por un morfismo de curvas

$$\Sigma_L \to \Sigma_K.$$

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$.

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$. Si $f \in K$ no tiene polo en $Q \in \mathbb{P}^1$,

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$. Si $f \in K$ no tiene polo en $Q \in \mathbb{P}^1$, decimos que es **regular** en Q.

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$. Si $f \in K$ no tiene polo en $Q \in \mathbb{P}^1$, decimos que es **regular** en Q.
Para cada $P \in \mathbb{P}^1$,

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$. Si $f \in K$ no tiene polo en $Q \in \mathbb{P}^1$, decimos que es **regular** en Q.

Para cada $P \in \mathbb{P}^1$,

$$A_P = \{\text{funciones regulares en cada } Q \neq P\}$$

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$. Si $f \in K$ no tiene polo en $Q \in \mathbb{P}^1$, decimos que es **regular** en Q.
Para cada $P \in \mathbb{P}^1$,

$$A_P = \{\text{funciones regulares en cada } Q \neq P\}$$

es un dominio de Dedekind

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$. Si $f \in K$ no tiene polo en $Q \in \mathbb{P}^1$, decimos que es **regular** en Q.
Para cada $P \in \mathbb{P}^1$,

$$A_P = \{\text{funciones regulares en cada } Q \neq P\}$$

es un dominio de Dedekind con campo de fraciones $\mathbb{F}(T)$.

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$. Si $f \in K$ no tiene polo en $Q \in \mathbb{P}^1$, decimos que es **regular** en Q.
Para cada $P \in \mathbb{P}^1$,

$$A_P = \{\text{funciones regulares en cada } Q \neq P\}$$

es un dominio de Dedekind con campo de fraciones $\mathbb{F}(T)$.

Escogiendo $P = \infty$,

Sea $K = \mathbb{F}(T) = \mathrm{Rac}(\mathbb{P}^1)$. Si $f \in K$ no tiene polo en $Q \in \mathbb{P}^1$, decimos que es **regular** en Q.
Para cada $P \in \mathbb{P}^1$,

$$A_P = \{\text{funciones regulares en cada } Q \neq P\}$$

es un dominio de Dedekind con campo de fraciones $\mathbb{F}(T)$.

Escogiendo $P = \infty$, tenemos

$$A := A_\infty = \mathbb{F}[T].$$

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

Enteros Absolutos y Relativos

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

- **Enteros absolutos:** Escogemos $\infty_K \in \Sigma_K$

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

- **Enteros absolutos:** Escogemos $\infty_K \in \Sigma_K$ y definimos

$$A_{\infty_K}$$

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

- **Enteros absolutos:** Escogemos $\infty_K \in \Sigma_K$ y definimos

$$A_{\infty_K} = \{\text{funciones regulares afuera de } \infty_K\}.$$

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

- **Enteros absolutos:** Escogemos $\infty_K \in \Sigma_K$ y definimos

$$A_{\infty_K} = \{\text{funciones regulares afuera de } \infty_K\}.$$

Si $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ induce $K/\mathbb{F}(T)$

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

- **Enteros absolutos:** Escogemos $\infty_K \in \Sigma_K$ y definimos

$$A_{\infty_K} = \{\text{funciones regulares afuera de } \infty_K\}.$$

Si $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ induce $K/\mathbb{F}(T)$ escogemos $\infty_K \in \pi^{-1}(\infty)$.

Enteros Absolutos y Relativos

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

- **Enteros absolutos:** Escogemos $\infty_K \in \Sigma_K$ y definimos

$$A_{\infty_K} = \{\text{funciones regulares afuera de } \infty_K\}.$$

Si $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ induce $K/\mathbb{F}(T)$ escogemos $\infty_K \in \pi^{-1}(\infty)$. Luego

$$\mathcal{O}_K = \{\text{funciones regulares afuera de } \pi^{-1}(\infty)\}$$

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

- **Enteros absolutos:** Escogemos $\infty_K \in \Sigma_K$ y definimos

$$A_{\infty_K} = \{\text{funciones regulares afuera de } \infty_K\}.$$

Si $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ induce $K/\mathbb{F}(T)$ escogemos $\infty_K \in \pi^{-1}(\infty)$. Luego

$$\mathcal{O}_K = \{\text{funciones regulares afuera de } \pi^{-1}(\infty)\} \supset A_{\infty_K}$$

Para cada $K/\mathbb{F}(T)$, hay ***dos*** dominios de Dedekind naturales que podemos considerar:

- **Enteros relativos:**

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

- **Enteros absolutos:** Escogemos $\infty_K \in \Sigma_K$ y definimos

$$A_{\infty_K} = \{\text{funciones regulares afuera de } \infty_K\}.$$

Si $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ induce $K/\mathbb{F}(T)$ escogemos $\infty_K \in \pi^{-1}(\infty)$. Luego

$$\mathcal{O}_K = \{\text{funciones regulares afuera de } \pi^{-1}(\infty)\} \supset A_{\infty_K} \supset A.$$

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K si v_{∞_K} tiene $[L:K]$-extensiones a L.

Campos de Clase de Hilbert

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K si v_{∞_K} tiene $[L:K]$-extensiones a L.

Los **campos de clase de Hilbert** de A_{∞_K}, resp. $\mathcal{O}_K$,

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K si v_{∞_K} tiene $[L : K]$-extensiones a L.

Los **campos de clase de Hilbert** de A_{∞_K}, resp. $\mathcal{O}_K$,

$$H_{A_{\infty_K}} \supset H_{\mathcal{O}_K}$$

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K si v_{∞_K} tiene $[L:K]$-extensiones a L.

Los **campos de clase de Hilbert** de A_{∞_K}, resp. $\mathcal{O}_K$,

$$H_{A_{\infty_K}} \supset H_{\mathcal{O}_K}$$

son definidos como las maximales extensiones abelianas y no-ramificadas de K

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K si v_{∞_K} tiene $[L:K]$-extensiones a L.

Los **campos de clase de Hilbert** de A_{∞_K}, resp. $\mathcal{O}_K$,

$$H_{A_{\infty_K}} \supset H_{\mathcal{O}_K}$$

son definidos como las maximales extensiones abelianas y no-ramificadas de K que se escinden completamente en ∞_K

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K si v_{∞_K} tiene $[L:K]$-extensiones a L.

Los **campos de clase de Hilbert** de A_{∞_K}, resp. $\mathcal{O}_K$,

$$H_{A_{\infty_K}} \supset H_{\mathcal{O}_K}$$

son definidos como las maximales extensiones abelianas y no-ramificadas de K que se escinden completamente en ∞_K resp. $\pi^{-1}(\infty)$.

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K si v_{∞_K} tiene $[L:K]$-extensiones a L.

Los **campos de clase de Hilbert** de A_{∞_K}, resp. $\mathcal{O}_K$,

$$H_{A_{\infty_K}} \supset H_{\mathcal{O}_K}$$

son definidos como las maximales extensiones abelianas y no-ramificadas de K que se escinden completamente en ∞_K resp. $\pi^{-1}(\infty)$. Tenemos

$$\mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_K}}/K) \cong \mathrm{Cl}_{A_{\infty_K}}$$

Un punto $\infty_K \in \Sigma_K$ determina la valuación

$$v_{\infty_K}(f) = -\mathrm{ord}_{\infty_K}(f).$$

Si L/K es una extensión decimos que **se escinde completamente** en ∞_K si v_{∞_K} tiene $[L:K]$-extensiones a L.

Los **campos de clase de Hilbert** de A_{∞_K}, resp. $\mathcal{O}_K$,

$$H_{A_{\infty_K}} \supset H_{\mathcal{O}_K}$$

son definidos como las maximales extensiones abelianas y no-ramificadas de K que se escinden completamente en ∞_K resp. $\pi^{-1}(\infty)$. Tenemos

$$\mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_K}}/K) \cong \mathrm{Cl}_{A_{\infty_K}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(H_{\mathcal{O}_K}/K) \cong \mathrm{Cl}_{\mathcal{O}_K}.$$

Ejemplo: Enteros Cuadráticos

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática

Ejemplo: Enteros Cuadráticos

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo:

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$.

Ejemplo: Enteros Cuadráticos

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$. Luego

$$A_{\infty_K} = \mathcal{O}_K.$$

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$. Luego

$$A_{\infty_K} = \mathcal{O}_K.$$

Caso Real:

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$. Luego

$$A_{\infty_K} = \mathcal{O}_K.$$

Caso Real: π es no ramificado en ∞, i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}$.

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$. Luego

$$A_{\infty_K} = \mathcal{O}_K.$$

Caso Real: π es no ramificado en ∞, i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}$. Luego tenemos

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$. Luego

$$A_{\infty_K} = \mathcal{O}_K.$$

Caso Real: π es no ramificado en ∞, i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}$. Luego tenemos

$$\mathcal{O}_K = \langle A_{\infty_1} \cup A_{\infty_2} \rangle, \quad \mathbb{F} = A_{\infty_1} \cap A_{\infty_2}.$$

Ejemplo: Enteros Cuadráticos

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$. Luego

$$A_{\infty_K} = \mathcal{O}_K.$$

Caso Real: π es no ramificado en ∞, i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}$. Luego tenemos

$$\mathcal{O}_K = \langle A_{\infty_1} \cup A_{\infty_2} \rangle, \quad \mathbb{F} = A_{\infty_1} \cap A_{\infty_2}.$$

Si $K = \mathbb{F}(T)(f)$ y el discriminante de f tiene grado d entonces

Ejemplo: Enteros Cuadráticos

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$. Luego

$$A_{\infty_K} = \mathcal{O}_K.$$

Caso Real: π es no ramificado en ∞, i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}$. Luego tenemos

$$\mathcal{O}_K = \langle A_{\infty_1} \cup A_{\infty_2} \rangle, \quad \mathbb{F} = A_{\infty_1} \cap A_{\infty_2}.$$

Si $K = \mathbb{F}(T)(f)$ y el discriminante de f tiene grado d entonces

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{F}[T, f]$$

Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática con $\pi : \Sigma_K \to \mathbb{P}^1$ el morfismo de grado 2 induciendo la extensión.

Caso Complejo: π ramifica en ∞ i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_K\}$. Luego

$$A_{\infty_K} = \mathcal{O}_K.$$

Caso Real: π es no ramificado en ∞, i.e. $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}$. Luego tenemos

$$\mathcal{O}_K = \langle A_{\infty_1} \cup A_{\infty_2} \rangle, \quad \mathbb{F} = A_{\infty_1} \cap A_{\infty_2}.$$

Si $K = \mathbb{F}(T)(f)$ y el discriminante de f tiene grado d entonces

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{F}[T, f] \supset A_{\infty_1} = \mathbb{F}[f, fT, \dots, fT^{d-1}].$$

Invariante Modular Cuántico II

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x|$$

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)}$$

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\mathsf{deg}_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto.

Los Reales y Los Complejos

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$\mathbf{R} :=$ completación de $\mathbb{F}(T)$ c.r.a. $|\cdot|$

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$$\mathbf{R} := \text{ completación de } \mathbb{F}(T) \text{ c.r.a. } |\cdot| = \mathbb{F}((1/T))$$

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$\mathbf{R} :=$ completación de $\mathbb{F}(T)$ c.r.a. $|\cdot| = \mathbb{F}((1/T))$ (los “reales”).

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\mathrm{deg}_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$\mathbf{R} :=$ completación de $\mathbb{F}(T)$ c.r.a. $|\cdot| = \mathbb{F}((1/T))$ (los "reales").

A diferencia del caso númerico,

Los Reales y Los Complejos

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$$\mathbf{R} := \text{ completación de } \mathbb{F}(T) \text{ c.r.a. } |\cdot| = \mathbb{F}((1/T)) \quad \text{(los “reales”)}.$$

A diferencia del caso númerico, la cerradura algebraica $\overline{\mathbf{R}}$ **NO** es completa c.r.a. $|\cdot|$.

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\mathrm{deg}_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$$\mathbf{R} := \text{ completación de } \mathbb{F}(T) \text{ c.r.a. } |\cdot| = \mathbb{F}((1/T)) \quad \text{(los “reales”)}.$$

A diferencia del caso númerico, la cerradura algebraica $\overline{\mathbf{R}}$ **NO** es completa c.r.a. $|\cdot|$. Pero

$$\mathbf{C} := \text{completación de } \overline{\mathbf{R}} \text{ c.r.a. } |\cdot|$$

Los Reales y Los Complejos

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$$\mathbf{R} := \text{ completación de } \mathbb{F}(T) \text{ c.r.a. } |\cdot| = \mathbb{F}((1/T)) \quad \text{(los “reales”)}.$$

A diferencia del caso númerico, la cerradura algebraica $\overline{\mathbf{R}}$ **NO** es completa c.r.a. $|\cdot|$. Pero

$$\mathbf{C} := \text{completación de } \overline{\mathbf{R}} \text{ c.r.a. } |\cdot|$$

sigue siendo algebraicamente cerrado.

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$$\mathbf{R} := \text{ completación de } \mathbb{F}(T) \text{ c.r.a. } |\cdot| = \mathbb{F}((1/T)) \quad \text{(los “reales”)}.$$

A diferencia del caso númerico, la cerradura algebraica $\overline{\mathbf{R}}$ **NO** es completa c.r.a. $|\cdot|$. Pero

$$\mathbf{C} := \text{completación de } \overline{\mathbf{R}} \text{ c.r.a. } |\cdot|$$

sigue siendo algebraicamente cerrado. Es el análogo de los complejos

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$$\mathbf{R} := \text{ completación de } \mathbb{F}(T) \text{ c.r.a. } |\cdot| = \mathbb{F}((1/T)) \quad \text{(los “reales”)}.$$

A diferencia del caso númerico, la cerradura algebraica $\overline{\mathbf{R}}$ **NO** es completa c.r.a. $|\cdot|$. Pero

$$\mathbf{C} := \text{completación de } \overline{\mathbf{R}} \text{ c.r.a. } |\cdot|$$

sigue siendo algebraicamente cerrado. Es el análogo de los complejos y tenemos

$$[\mathbf{C} : \mathbf{R}] = \infty$$

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\deg_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$$\mathbf{R} := \text{ completación de } \mathbb{F}(T) \text{ c.r.a. } |\cdot| = \mathbb{F}((1/T)) \quad \text{(los "reales")}.$$

A diferencia del caso númerico, la cerradura algebraica $\overline{\mathbf{R}}$ **NO** es completa c.r.a. $|\cdot|$. Pero

$$\mathbf{C} := \text{completación de } \overline{\mathbf{R}} \text{ c.r.a. } |\cdot|$$

sigue siendo algebraicamente cerrado. Es el análogo de los complejos y tenemos

$$[\mathbf{C} : \mathbf{R}] = \infty > [\mathbb{C} : \mathbb{R}]$$

Sea $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ el valor absoluto en $\mathbb{F}(T)$ definido

$$|x| = q^{-v_\infty(x)} = q^{\mathrm{deg}_T(x)}.$$

$|\cdot|$ es no arquimediano puesto que v_∞ es discreto. Escribimos

$$\mathbf{R} := \text{ completación de } \mathbb{F}(T) \text{ c.r.a. } |\cdot| = \mathbb{F}((1/T)) \quad \text{(los “reales”)}.$$

A diferencia del caso númerico, la cerradura algebraica $\overline{\mathbf{R}}$ **NO** es completa c.r.a. $|\cdot|$. Pero

$$\mathbf{C} := \text{completación de } \overline{\mathbf{R}} \text{ c.r.a. } |\cdot|$$

sigue siendo algebraicamente cerrado. Es el análogo de los complejos y tenemos

$$[\mathbf{C} : \mathbf{R}] = \infty > [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2.$$

Dado $f \in \mathbf{R}$,

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f)$$

Invariante Modular Cuántico

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \; : \; \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\| =$ distancia al elemento de A más cercano.

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\| =$ distancia al elemento de A más cercano.

La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k)$$

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\| =$ distancia al elemento de A más cercano.

La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{\substack{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \\ \text{mónico}}} a^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\|$ = distancia al elemento de A más cercano.
La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{\substack{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \\ \text{mónico}}} a^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego definimos

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\|$ = distancia al elemento de A más cercano.
La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{\substack{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \\ \text{mónico}}} a^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego definimos (siguiendo la definición del invariante-j de Gekeler)

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \; : \; \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\|$ = distancia al elemento de A más cercano.
La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{\substack{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \\ \text{mónico}}} a^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego definimos (siguiendo la definición del invariante-j de Gekeler)

$$j_\varepsilon(f)$$

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\| =$ distancia al elemento de A más cercano.

La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{\substack{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \\ \text{mónico}}} a^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego definimos (siguiendo la definición del invariante-j de Gekeler)

$$j_\varepsilon(f) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J_\varepsilon(f)},$$

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\| =$ distancia al elemento de A más cercano.
La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{\substack{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \\ \text{mónico}}} a^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego definimos (siguiendo la definición del invariante-j de Gekeler)

$$j_\varepsilon(f) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J_\varepsilon(f)}, \quad J_\varepsilon(f) = \frac{\zeta_{f,\varepsilon}(q^2 - 1)}{\zeta_{f,\varepsilon}(q-1)^{q+1}}$$

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\| =$ distancia al elemento de A más cercano.

La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{\substack{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \\ \text{mónico}}} a^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego definimos (siguiendo la definición del invariante-j de Gekeler)

$$j_\varepsilon(f) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J_\varepsilon(f)}, \quad J_\varepsilon(f) = \frac{\zeta_{f,\varepsilon}(q^2 - 1)}{\zeta_{f,\varepsilon}(q-1)^{q+1}}$$

y $j^{\mathrm{qt}} : \mathbf{R}/\mathrm{GL}_2(A) \multimap \mathbf{R} \cup \{\infty\}$,

Dado $f \in \mathbf{R}$, definimos

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \{a \in A \ : \ \|af\| < \varepsilon\}$$ **(un $\mathbb{F}$-espacio vectorial)**

donde $\|x\| =$ distancia al elemento de A más cercano.
La **ε función zeta** de f es

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{\substack{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \\ \text{mónico}}} a^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego definimos (siguiendo la definición del invariante-j de Gekeler)

$$j_\varepsilon(f) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J_\varepsilon(f)}, \quad J_\varepsilon(f) = \frac{\zeta_{f,\varepsilon}(q^2-1)}{\zeta_{f,\varepsilon}(q-1)^{q+1}}$$

y $j^{\mathrm{qt}} : \mathbf{R}/\mathrm{GL}_2(A) \multimap \mathbf{R} \cup \{\infty\}, \quad j^{\mathrm{qt}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} j_\varepsilon(f).$

Teorema. *Sea* $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$.

Teorema. *Sea* $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$. *Entonces para todo* $0 < \varepsilon < 1$,

$$|j_\varepsilon(f)| = q^{2q-1}.$$

Teorema. *Sea* $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$. *Entonces para todo* $0 < \varepsilon < 1$,

$$|j_\varepsilon(f)| = q^{2q-1}.$$

En particular, $\infty \notin j^{\mathrm{qt}}(f)$.

Teorema. *Sea* $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$. *Entonces para todo* $0 < \varepsilon < 1$,

$$|j_\varepsilon(f)| = q^{2q-1}.$$

En particular, $\infty \notin j^{\mathrm{qt}}(f)$.

Teorema. $f \in \mathbb{F}(T) \Leftrightarrow$ *eventualmente* $j_\varepsilon(f) = \infty$

Teorema. *Sea* $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$. *Entonces para todo* $0 < \varepsilon < 1$,

$$|j_\varepsilon(f)| = q^{2q-1}.$$

En particular, $\infty \notin j^{\mathrm{qt}}(f)$.

Teorema. $f \in \mathbb{F}(T) \Leftrightarrow$ *eventualmente* $j_\varepsilon(f) = \infty \Leftrightarrow j^{\mathrm{qt}}(f) = \infty$.

Teorema. *Sea* $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$. *Entonces para todo* $0 < \varepsilon < 1$,

$$|j_\varepsilon(f)| = q^{2q-1}.$$

En particular, $\infty \notin j^{\mathrm{qt}}(f)$.

Teorema. $f \in \mathbb{F}(T) \Leftrightarrow$ *eventualmente* $j_\varepsilon(f) = \infty \Leftrightarrow$ $j^{\mathrm{qt}}(f) = \infty$.

Teorema. *Si* f *es cuádratico entonces* $\# j^{\mathrm{qt}}(f) < \infty$.

Teorema. *Sea $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$. Entonces para todo $0 < \varepsilon < 1$,*

$$|j_\varepsilon(f)| = q^{2q-1}.$$

En particular, $\infty \notin j^{\mathrm{qt}}(f)$.

Teorema. *$f \in \mathbb{F}(T) \Leftrightarrow$ eventualmente $j_\varepsilon(f) = \infty \Leftrightarrow j^{\mathrm{qt}}(f) = \infty$.*

Teorema. *Si f es cuádratico entonces $\# j^{\mathrm{qt}}(f) < \infty$.*

[2] Demangos, L. & Gendron, T., *Quantum j-invariant in positive characteristic I: convergence.* Archiv der Math. **107** (1), 23–35 (2016).

[3] Demangos, L. & Gendron, T., *Quantum j-invariant in positive characteristic II: values at the quadratics.* Archiv der Math. **107** (2), 59–166 (2016).

Campo de Clase de Hilbert

Teorema. *Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática y real*

Teorema. *Sea* $K/\mathbb{F}(T)$ *cuadrática y real (i.e.* $K \subset \mathbf{R}$*)*

Teorema. *Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática y real (i.e. $K \subset \mathbf{R}$)*

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K\,.$$

Teorema. *Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática y real (i.e. $K \subset \mathbf{R}$)*

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K\,.$$

Sea $f \in \mathcal{O}_K^\times$ una unidad de orden infinito.

Teorema. *Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática y real (i.e. $K \subset \mathbf{R}$)*

$$\mathcal{O}_K = \textit{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \textit{ en } K\,.$$

Sea $f \in \mathcal{O}_K^\times$ una unidad de orden infinito. Entonces cada elemento de $j^{\mathrm{qt}}(f)$ es álgebraico

Teorema. *Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática y real (i.e. $K \subset \mathbf{R}$)*

$$\mathcal{O}_K = \textit{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \textit{ en } K\,.$$

Sea $f \in \mathcal{O}_K^\times$ una unidad de orden infinito. Entonces cada elemento de $j^{\mathrm{qt}}(f)$ es álgebraico y

$$H_{\mathcal{O}_K} = K(\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f)))$$

Teorema. *Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática y real (i.e. $K \subset \mathbf{R}$)*

$$\mathcal{O}_K = \textit{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \textit{ en } K.$$

Sea $f \in \mathcal{O}_K^{\times}$ una unidad de orden infinito. Entonces cada elemento de $j^{\mathrm{qt}}(f)$ es álgebraico y

$$H_{\mathcal{O}_K} = K(\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f)))$$

donde

$$\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f)) = \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(f)} \alpha.$$

Teorema. *Sea $K/\mathbb{F}(T)$ cuadrática y real (i.e. $K \subset \mathbf{R}$)*

$$\mathcal{O}_K = \text{cerradura entera de } A = \mathbb{F}[T] \text{ en } K.$$

Sea $f \in \mathcal{O}_K^\times$ una unidad de orden infinito. Entonces cada elemento de $j^{\mathrm{qt}}(f)$ es álgebraico y

$$H_{\mathcal{O}_K} = K(\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f)))$$

donde

$$\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f)) = \prod_{\alpha \in j^{\mathrm{qt}}(f)} \alpha.$$

[4] Demangos, L. & Gendron, T., *The Quantum j-Invariant and Hilbert Class Fields of Real Quadratic Extensions in Positive Characteristic.* (2016) http://arxiv.org/abs/1607.03027

La Prueba I

1. Identificamos explicitamente $\Lambda_{\varepsilon}(f)$ en terminos de las **approximaciones mejores** de f.

Dado $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$

1. Identificamos explicitamente $\Lambda_\varepsilon(f)$ en terminos de las **approximaciones mejores** de f.

Dado $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$ sea $a_0 \in A$ su parte polinomial.

La Prueba I

1. Identificamos explicitamente $\Lambda_\varepsilon(f)$ en terminos de las **approximaciones mejores** de f.

Dado $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$ sea $a_0 \in A$ su parte polinomial. Escribiendo

$$f = a_0 + 1/f_1,$$

1. Identificamos explicitamente $\Lambda_\varepsilon(f)$ en terminos de las **approximaciones mejores** de f.

Dado $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$ sea $a_0 \in A$ su parte polinomial. Escribiendo

$$f = a_0 + 1/f_1,$$

sea $a_1 \in A$ la parte polinomial de f_1, etc.

1. Identificamos explicitamente $\Lambda_{\varepsilon}(f)$ en terminos de las **approximaciones mejores** de f.

Dado $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$ sea $a_0 \in A$ su parte polinomial. Escribiendo

$$f = a_0 + 1/f_1,$$

sea $a_1 \in A$ la parte polinomial de f_1, etc.
Obtenemos la **expansión en fracción contínua** de f:

1. Identificamos explicitamente $\Lambda_\varepsilon(f)$ en terminos de las **approximaciones mejores** de f.

Dado $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$ sea $a_0 \in A$ su parte polinomial. Escribiendo

$$f = a_0 + 1/f_1,$$

sea $a_1 \in A$ la parte polinomial de f_1, etc.
Obtenemos la **expansión en fracción contínua** de f:

$$a_0, \quad a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad \cdots \longrightarrow f.$$

1. Identificamos explicitamente $\Lambda_\varepsilon(f)$ en terminos de las **approximaciones mejores** de f.

Dado $f \in \mathbf{R} - \mathbb{F}(T)$ sea $a_0 \in A$ su parte polinomial. Escribiendo

$$f = a_0 + 1/f_1,$$

sea $a_1 \in A$ la parte polinomial de f_1, etc.
Obtenemos la **expansión en fracción contínua** de f:

$$a_0, \quad a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad \cdots \longrightarrow f.$$

Escribimos

$$f = [a_0, a_1, \ldots].$$

Dado $f = [a_0, a_1, \ldots],$

Dado $f = [a_0, a_1, \ldots]$, su secuencia de **aproximaciones mejores** se define

Dado $f = [a_0, a_1, \dots]$, su secuencia de **aproximaciones mejores** se define

$$\mathfrak{q}_0 = 1,$$

Dado $f = [a_0, a_1, \ldots]$, su secuencia de **aproximaciones mejores** se define

$$\mathrm{q}_0 = 1,\ \mathrm{q}_1 = a_1,$$

Dado $f = [a_0, a_1, \ldots]$, su secuencia de **aproximaciones mejores** se define

$$\mathsf{q}_0 = 1,\ \mathsf{q}_1 = a_1,\ \ldots,\ \mathsf{q}_i = a_i \mathsf{q}_{i-1} + \mathsf{q}_{i-2}.$$

Dado $f = [a_0, a_1, \dots]$, su secuencia de **aproximaciones mejores** se define

$$\mathrm{q}_0 = 1,\ \mathrm{q}_1 = a_1,\ \dots,\ \mathrm{q}_i = a_i \mathrm{q}_{i-1} + \mathrm{q}_{i-2}.$$

Luego para $\varepsilon = q^{-Nd-l}$,

Dado $f = [a_0, a_1, \ldots]$, su secuencia de **aproximaciones mejores** se define

$$\mathsf{q}_0 = 1,\ \mathsf{q}_1 = a_1,\ \ldots,\ \mathsf{q}_i = a_i\mathsf{q}_{i-1} + \mathsf{q}_{i-2}.$$

Luego para $\varepsilon = q^{-Nd-l}$, $\Lambda_\varepsilon(f)$ es el $\mathbb{F}$-espacio vectorial

Dado $f = [a_0, a_1, \dots]$, su secuencia de **aproximaciones mejores** se define

$$\mathfrak{q}_0 = 1,\ \mathfrak{q}_1 = a_1,\ \dots,\ \mathfrak{q}_i = a_i\mathfrak{q}_{i-1} + \mathfrak{q}_{i-2}.$$

Luego para $\varepsilon = q^{-Nd-l}$, $\Lambda_\varepsilon(f)$ es el $\mathbb{F}$-espacio vectorial

$$\mathbb{F}\langle \mathfrak{q}_N, \dots, T^{d-1-l}\mathfrak{q}_N, \mathfrak{q}_{N+1}, T\mathfrak{q}_{N+1}, \dots, T^{d-1}\mathfrak{q}_{N+1}, \dots \rangle.$$

Para $\mathfrak{a} \subset A_{\infty_1}$,

Para $\mathfrak{a} \subset A_{\infty_1}$, definimos

$$j(\mathfrak{a})$$

Para $\mathfrak{a} \subset A_{\infty_1}$, definimos

$$j(\mathfrak{a}) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J(\mathfrak{a})},$$

Para $\mathfrak{a} \subset A_{\infty_1}$, definimos

$$j(\mathfrak{a}) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2}-T}{T^{q^2}-T^q} J(\mathfrak{a})}, \quad J(\mathfrak{a}) = \frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(q^2-1)}{\zeta_{\mathfrak{a}}(q-1)^{q+1}}$$

Por el Lema de Goss,

Para $\mathfrak{a} \subset A_{\infty_1}$, definimos

$$j(\mathfrak{a}) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J(\mathfrak{a})}, \quad J(\mathfrak{a}) = \frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(q^2 - 1)}{\zeta_{\mathfrak{a}}(q-1)^{q+1}}$$

Por el Lema de Goss, existe ξ trascendente t.q.

$$\frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(n)}{\xi^n} \in H_{A_{\infty_1}}, \quad n = \text{un multiplo de } q-1$$

La Prueba II

Para $\mathfrak{a} \subset A_{\infty_1}$, definimos

$$j(\mathfrak{a}) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J(\mathfrak{a})}, \quad J(\mathfrak{a}) = \frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(q^2 - 1)}{\zeta_{\mathfrak{a}}(q-1)^{q+1}}$$

Por el Lema de Goss, existe ξ trascendente t.q.

$$\frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(n)}{\xi^n} \in H_{A_{\infty_1}}, \quad n = \text{un multiplo de } q - 1$$

(un análogo de la fórmula de Euler $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} \in \mathbb{Q} = H_{\mathbb{Q}}$).

Para $\mathfrak{a} \subset A_{\infty_1}$, definimos

$$j(\mathfrak{a}) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J(\mathfrak{a})}, \quad J(\mathfrak{a}) = \frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(q^2 - 1)}{\zeta_{\mathfrak{a}}(q-1)^{q+1}}$$

Por el Lema de Goss, existe ξ trascendente t.q.

$$\frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(n)}{\xi^n} \in H_{A_{\infty_1}}, \quad n \text{ = un multiplo de } q - 1$$

(un análogo de la fórmula de Euler $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} \in \mathbb{Q} = H_{\mathbb{Q}}$).

Ya que numerador y denominador de $J(\mathfrak{a})$ son homogeneos del grado $q^2 - 1$,

Para $\mathfrak{a} \subset A_{\infty_1}$, definimos

$$j(\mathfrak{a}) = \frac{T^q - T}{1 - \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} J(\mathfrak{a})}, \quad J(\mathfrak{a}) = \frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(q^2 - 1)}{\zeta_{\mathfrak{a}}(q-1)^{q+1}}$$

Por el Lema de Goss, existe ξ trascendente t.q.

$$\frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(n)}{\xi^n} \in H_{A_{\infty_1}}, \quad n = \text{un multiplo de } q - 1$$

(un análogo de la fórmula de Euler $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} \in \mathbb{Q} = H_{\mathbb{Q}}$).

Ya que numerador y denominador de $J(\mathfrak{a})$ son homogeneos del grado $q^2 - 1$, sigue que

$$j(\mathfrak{a}) \subset H_{A_{\infty_1}}.$$

Luego, usando Parte I

Luego, usando Parte I y la fórmula de Binet:

Luego, usando Parte I y la fórmula de Binet:

$$\mathfrak{q}_n$$

Luego, usando Parte I y la fórmula de Binet:

$$\mathfrak{q}_n = \frac{f^{n+1} + (-f^{-1})^{n+1}}{\sqrt{D}}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Luego, usando Parte I y la fórmula de Binet:

$$\mathfrak{q}_n = \frac{f^{n+1} + (-f^{-1})^{n+1}}{\sqrt{D}}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

demostramos

La Prueba II

Luego, usando Parte I y la fórmula de Binet:

$$\mathsf{q}_n = \frac{f^{n+1} + (-f^{-1})^{n+1}}{\sqrt{D}}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

demostramos

$$j^{\mathrm{qt}}(f) = \{j(\mathfrak{a}) |\ \mathfrak{a} \in \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K})\}.$$

Por Reciprocidad

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K})$$

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K}) \cong \mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_1}}/H_{\mathcal{O}_K}).$$

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K}) \cong \mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_1}}/H_{\mathcal{O}_K}).$$

Si $\mathfrak{b} \leftrightarrow \sigma_{\mathfrak{b}}$,

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K}) \cong \mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_1}}/H_{\mathcal{O}_K}).$$

Si $\mathfrak{b} \leftrightarrow \sigma_{\mathfrak{b}}$, por El Teorema Fundamental de la Teoría Drinfeld-Hayes,

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K}) \cong \mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_1}}/H_{\mathcal{O}_K}).$$

Si $\mathfrak{b} \leftrightarrow \sigma_{\mathfrak{b}}$, por El Teorema Fundamental de la Teoría Drinfeld-Hayes,

$$\left(\prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a})\right)^{\sigma_{\mathfrak{b}}}$$

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K}) \cong \mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_1}}/H_{\mathcal{O}_K}).$$

Si $\mathfrak{b} \leftrightarrow \sigma_{\mathfrak{b}}$, por El Teorema Fundamental de la Teoría Drinfeld-Hayes,

$$\left(\prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a})\right)^{\sigma_{\mathfrak{b}}} = \prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$$

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K}) \cong \mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_1}}/H_{\mathcal{O}_K}).$$

Si $\mathfrak{b} \leftrightarrow \sigma_{\mathfrak{b}}$, por El Teorema Fundamental de la Teoría Drinfeld-Hayes,

$$\left(\prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a})\right)^{\sigma_{\mathfrak{b}}} = \prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) = \prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a})$$

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K}) \cong \mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_1}}/H_{\mathcal{O}_K}).$$

Si $\mathfrak{b} \leftrightarrow \sigma_{\mathfrak{b}}$, por El Teorema Fundamental de la Teoría Drinfeld-Hayes,

$$\left(\prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a})\right)^{\sigma_{\mathfrak{b}}} = \prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) = \prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a})$$

i.e.

$$\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f))^{\sigma_{\mathfrak{b}}} = \mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f))$$

Por Reciprocidad

$$Z := \mathrm{Ker}(\mathsf{Cl}_{A_{\infty_K}} \to \mathsf{Cl}_{\mathcal{O}_K}) \cong \mathrm{Gal}(H_{A_{\infty_1}}/H_{\mathcal{O}_K}).$$

Si $\mathfrak{b} \leftrightarrow \sigma_{\mathfrak{b}}$, por El Teorema Fundamental de la Teoría Drinfeld-Hayes,

$$\left(\prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a})\right)^{\sigma_{\mathfrak{b}}} = \prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) = \prod_{\mathfrak{a}\in Z} j(\mathfrak{a})$$

i.e.

$$\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f))^{\sigma_{\mathfrak{b}}} = \mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f))$$

o sea

$$K(\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f))) \subset H_{\mathcal{O}_K}.$$

Finalmente,

Finalmente, por ochos páginas de cálculos feos, Finalmente, por ochos páginas de cálculos feos, demostramos que las conjugadas de $\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f))$ sobre K

La Prueba IV

Finalmente, por ochos páginas de cálculos feos, demostramos que las conjugadas de $\mathsf{N}(j^{\mathrm{qt}}(f))$ sobre K tienen cardinalidad $[H_{\mathcal{O}_K} : K]$

Finalmente, por ochos páginas de cálculos feos, demostramos que las conjugadas de $\mathsf{N}(j^{\rm qt}(f))$ sobre K tienen cardinalidad $[H_{\mathcal{O}_K} : K]$ es decir

$$K(\mathsf{N}(j^{\rm qt}(f))) = H_{\mathcal{O}_K}.$$

Campos de Clase de Rayos

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z)$$

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Existe $\xi_A \in \mathbf{C}$ que juega el papel de $2\pi i$

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Existe $\xi_A \in \mathbf{C}$ que juega el papel de $2\pi i$ y escribimos

$$\exp_A(z) = e_A(\xi_A z).$$

Exponencial Cuántica

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Existe $\xi_A \in \mathbf{C}$ que juega el papel de $2\pi i$ y escribimos

$$\exp_A(z) = e_A(\xi_A z).$$

Esta construccion se puede repeter con A_{∞_1} y sus ideales, *etc.*

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Existe $\xi_A \in \mathbf{C}$ que juega el papel de $2\pi i$ y escribimos

$$\exp_A(z) = e_A(\xi_A z).$$

Esta construccion se puede repeter con A_{∞_1} y sus ideales, *etc.* Lo hacemos usando $\Lambda_\varepsilon(f)$ para obtener

$$\exp_{f,\varepsilon}(z)$$

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Existe $\xi_A \in \mathbf{C}$ que juega el papel de $2\pi i$ y escribimos

$$\exp_A(z) = e_A(\xi_A z).$$

Esta construccion se puede repeter con A_{∞_1} y sus ideales, *etc.* Lo hacemos usando $\Lambda_\varepsilon(f)$ para obtener

$$\exp_{f,\varepsilon}(z) = e_{f,\varepsilon}(\xi_{f,\varepsilon} z).$$

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Existe $\xi_A \in \mathbf{C}$ que juega el papel de $2\pi i$ y escribimos

$$\exp_A(z) = e_A(\xi_A z).$$

Esta construccion se puede repeter con A_{∞_1} y sus ideales, *etc.* Lo hacemos usando $\Lambda_\varepsilon(f)$ para obtener

$$\exp_{f,\varepsilon}(z) = e_{f,\varepsilon}(\xi_{f,\varepsilon} z).$$

Teorema. *El límite es la* **exponencial cuantica**

$$\exp_f^{\mathrm{qt}} : \mathbf{C} \multimap \mathbf{C},$$

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Existe $\xi_A \in \mathbf{C}$ que juega el papel de $2\pi i$ y escribimos

$$\exp_A(z) = e_A(\xi_A z).$$

Esta construccion se puede repeter con A_{∞_1} y sus ideales, *etc.* Lo hacemos usando $\Lambda_\varepsilon(f)$ para obtener

$$\exp_{f,\varepsilon}(z) = e_{f,\varepsilon}(\xi_{f,\varepsilon} z).$$

Teorema. *El límite es la* **exponencial cuantica**

$$\exp_f^{\mathrm{qt}} : \mathbf{C} \multimap \mathbf{C}, \quad \exp_f^{\mathrm{qt}}(z) =$$

Consideremos

$$e_A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad e_A(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in A} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Existe $\xi_A \in \mathbf{C}$ que juega el papel de $2\pi i$ y escribimos

$$\exp_A(z) = e_A(\xi_A z).$$

Esta construccion se puede repeter con A_{∞_1} y sus ideales, *etc.* Lo hacemos usando $\Lambda_\varepsilon(f)$ para obtener

$$\exp_{f,\varepsilon}(z) = e_{f,\varepsilon}(\xi_{f,\varepsilon} z).$$

Teorema. *El límite es la* **exponencial cuantica**

$$\exp_f^{\mathrm{qt}} : \mathbf{C} \multimap \mathbf{C}, \quad \exp_f^{\mathrm{qt}}(z) = \{\exp_{\mathfrak{a}_0}(z), \ldots, \exp_{\mathfrak{a}_{d-1}}(z)\}.$$

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$.

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados.

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados. Si $\Lambda_i = \mathfrak{a}_i$ como retícula,

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados. Si $\Lambda_i = \mathfrak{a}_i$ como retícula, podemos definir

$$\Lambda_i[\mathfrak{m}]$$

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados. Si $\Lambda_i = \mathfrak{a}_i$ como retícula, podemos definir

$$\Lambda_i[\mathfrak{m}] = \{z \in \mathbf{C} |\ \alpha z = 0 \ \forall \ \ \alpha \in \mathfrak{m}\}.$$

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados. Si $\Lambda_i = \mathfrak{a}_i$ como retícula, podemos definir

$$\Lambda_i[\mathfrak{m}] = \{z \in \mathbf{C} |\ \alpha z = 0 \ \ \forall \ \ \alpha \in \mathfrak{m}\}.$$

Teorema (Hayes). $K^{\mathfrak{m}} = H_{A_{\infty_1}}\left(\exp_{\mathfrak{a}_i}(\Lambda_i[\mathfrak{m}])\right)$.

Un punto de $\mathfrak{M}$ **torsion cuántica**

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados. Si $\Lambda_i = \mathfrak{a}_i$ como retícula, podemos definir

$$\Lambda_i[\mathfrak{m}] = \{z \in \mathbf{C} | \ \alpha z = 0 \ \ \forall \ \ \alpha \in \mathfrak{m}\}.$$

Teorema (Hayes). $K^{\mathfrak{m}} = H_{A_{\infty_1}} \left(\exp_{\mathfrak{a}_i} (\Lambda_i[\mathfrak{m}]) \right).$

Un punto de $\mathfrak{M}$ **torsion cuántica** es un multi-punto

$$z^{\mathrm{qt}} = \{z_0, \ldots, z_{d-1}\}$$

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados. Si $\Lambda_i = \mathfrak{a}_i$ como retícula, podemos definir

$$\Lambda_i[\mathfrak{m}] = \{z \in \mathbf{C} |\ \alpha z = 0\ \ \forall\ \ \alpha \in \mathfrak{m}\}.$$

Teorema (Hayes). $K^{\mathfrak{m}} = H_{A_{\infty_1}}\big(\exp_{\mathfrak{a}_i}(\Lambda_i[\mathfrak{m}])\big).$

Un punto de $\mathfrak{M}$ **torsion cuántica** es un multi-punto

$$z^{\mathrm{qt}} = \{z_0, \ldots, z_{d-1}\}$$

donde

$$\exp_f^{\mathrm{qt}}(z^{\mathrm{qt}})$$

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados. Si $\Lambda_i = \mathfrak{a}_i$ como retícula, podemos definir

$$\Lambda_i[\mathfrak{m}] = \{z \in \mathbf{C} |\ \alpha z = 0\ \ \forall\ \ \alpha \in \mathfrak{m}\}.$$

Teorema (Hayes). $K^{\mathfrak{m}} = H_{A_{\infty_1}}\left(\exp_{\mathfrak{a}_i}\left(\Lambda_i[\mathfrak{m}]\right)\right)$.

Un punto de **$\mathfrak{M}$ torsion cuántica** es un multi-punto

$$z^{\mathrm{qt}} = \{z_0, \ldots, z_{d-1}\}$$

donde

$$\exp_f^{\mathrm{qt}}(z^{\mathrm{qt}}) := \{\exp_{\mathfrak{a}_0}(z_0), \ldots, \exp_{\mathfrak{a}_{d-1}}(z_{d-1})\}$$

Sea $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A_{\infty_1}$. Sean $K^{\mathfrak{m}} \supset K^{\mathfrak{M}}$ los campos de clase asociados. Si $\Lambda_i = \mathfrak{a}_i$ como retícula, podemos definir

$$\Lambda_i[\mathfrak{m}] = \{z \in \mathbf{C} |\ \alpha z = 0 \ \ \forall \ \ \alpha \in \mathfrak{m}\}.$$

Teorema (Hayes). $K^{\mathfrak{m}} = H_{A_{\infty_1}}\left(\exp_{\mathfrak{a}_i}(\Lambda_i[\mathfrak{m}])\right).$

Un punto de $\mathfrak{M}$ **torsion cuántica** es un multi-punto

$$z^{\mathrm{qt}} = \{z_0, \ldots, z_{d-1}\}$$

donde

$$\exp_f^{\mathrm{qt}}(z^{\mathrm{qt}}) := \{\exp_{\mathfrak{a}_0}(z_0), \ldots, \exp_{\mathfrak{a}_{d-1}}(z_{d-1})\}$$

es un Gal$(K^{\mathfrak{m}}/K^{\mathfrak{M}})$ orbita.

Denotamos por $\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$

Denotamos por $\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$ el conjunto

$$\Big\{ \mathsf{Tr}(\exp_f^{\mathrm{qt}}(z^{\mathrm{qt}}))$$

Generación de Campos de Clase

Denotamos por $\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$ el conjunto

$$\left\{ \mathrm{Tr}(\exp_f^{\mathrm{qt}}(z^{\mathrm{qt}})) = \sum_{i=0}^{d-1} \exp_{\mathfrak{a}_i}(z_i) \,\middle|\, z^{\mathrm{qt}} \text{ de } \mathfrak{M} \text{ torsión cuántica} \right\}$$

Generación de Campos de Clase

Denotamos por $\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$ el conjunto

$$\left\{ \mathrm{Tr}(\exp_f^{\mathrm{qt}}(z^{\mathrm{qt}})) = \sum_{i=0}^{d-1} \exp_{\mathfrak{a}_i}(z_i) \,\middle|\, z^{\mathrm{qt}} \text{ de } \mathfrak{M} \text{ torsión cuántica} \right\}$$

Teorema (Demangos-Gendron). *$\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$ es subgrupo de $K^{\mathfrak{M}}$*

Denotamos por $\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$ el conjunto

$$\left\{ \mathrm{Tr}(\exp_f^{\mathrm{qt}}(z^{\mathrm{qt}})) = \sum_{i=0}^{d-1} \exp_{\mathfrak{a}_i}(z_i) \middle| z^{\mathrm{qt}} \text{ de } \mathfrak{M} \text{ torsión cuántica} \right\}$$

Teorema (Demangos-Gendron). *$\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$ es subgrupo de $K^{\mathfrak{M}}$ y*

$$K^{\mathfrak{M}} = H_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]).$$

Denotamos por $\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$ el conjunto

$$\left\{ \mathrm{Tr}(\exp_f^{\mathrm{qt}}(z^{\mathrm{qt}})) = \sum_{i=0}^{d-1} \exp_{\mathfrak{a}_i}(z_i) \,\middle|\, z^{\mathrm{qt}} \text{ de } \mathfrak{M} \text{ torsión cuántica} \right\}$$

Teorema (Demangos-Gendron). *$\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]$ es subgrupo de $K^{\mathfrak{M}}$ y*

$$K^{\mathfrak{M}} = H_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{D}^{\mathrm{qt}}[\mathfrak{M}]).$$

[5] Demangos, L. & Gendron, T., *Quantum Drinfeld Modules and a Solution to the Real Multiplication Program in Positive Characteristic*. en preparación