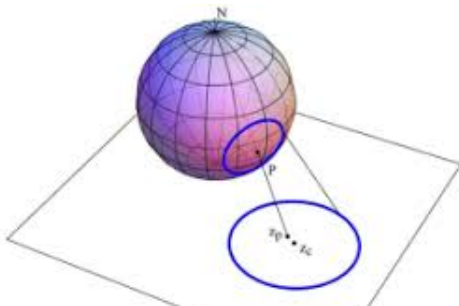


# Superficies Minimales

Gregor Weingart

XVI Escuela de Verano  
24 al 28 de junio de 2019



- 1 Superficies en  $\mathbb{R}^3$
- 2 Las Curvaturas Principales
- 3 El Teorema Egregio
- 4 La Variación del Área
- 5 La Parametrización de Enneper–Weierstraß
- 6 El Problema de los Períodos

# Superficies en $\mathbb{R}^3$

### Ejemplo (Planos afines en $\mathbb{R}^3$ )

*El plano afín  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  determinado por  $a, b, c \in \mathbb{R}$  no todos igual a cero y  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  es el conjunto de soluciones de la ecuación:*

$$\Sigma := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = \varepsilon \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

### Ejemplo (Esferas $S_r^2 \subset \mathbb{R}^3$ )

La esfera  $S_r^2$  del radio  $r > 0$  en  $\mathbb{R}^3$  es el conjunto de puntos de distancia  $r$  al origen:

$$S_r^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

### Ejemplo (Esferas $S_r^2 \subset \mathbb{R}^3$ )

La esfera  $S_r^2$  del radio  $r > 0$  en  $\mathbb{R}^3$  es el conjunto de puntos de distancia  $r$  al origen:

$$S_r^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

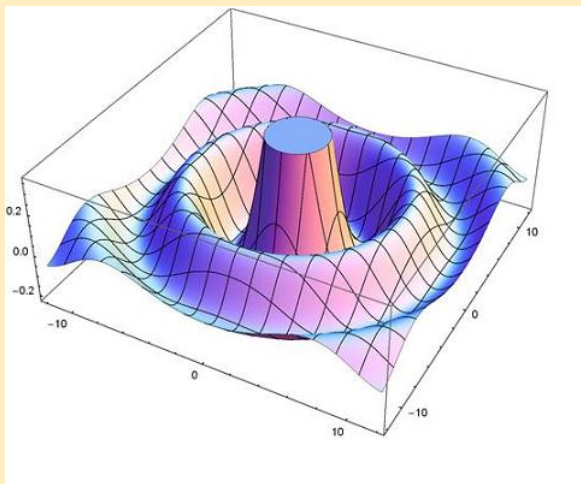
### Ejemplo (Gráficas de funciones I)

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto f(u, v)$ , una función suave definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . La gráfica  $\Sigma_f$  de  $f$  es la superficie en  $\mathbb{R}^3$  definida como la imagen  $\Sigma_f := X_f(U)$  de la aplicación:

$$X : U \rightarrow \Sigma_f \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

## Ejemplo (Gráficas de funciones II)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto \frac{\operatorname{sen}\sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$



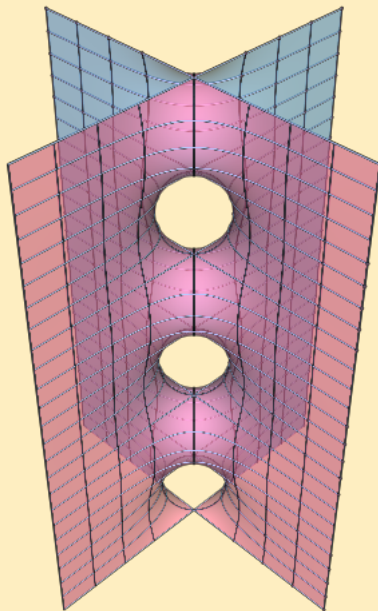
## Funciones suaves

Una función se llama suave, si y solamente si todas sus derivadas parciales iteradas de cualquier orden existen y son continuas.

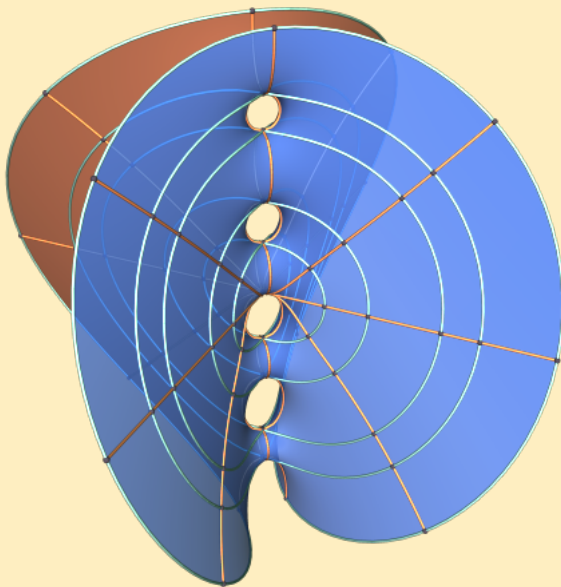
En este minicurso asumiremos por simplicidad que todas las funciones sean suaves.



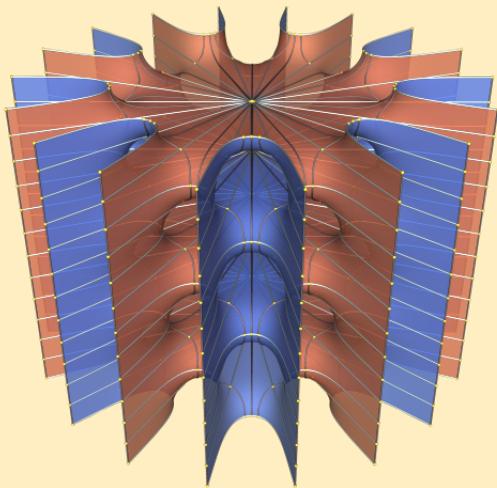
## Ejemplo (Ejemplos de superficies I)



## Ejemplo (Ejemplos de superficies II)



## Ejemplo (Ejemplos de superficies III)



## Definición (Parametrizaciones regulares)

Una parametrización de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  (también llamada una “superficie parametrizada”) es una aplicación diferenciable

$$X: U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto X(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

de un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$ . Una tal parametrización  $X$  se llama regular, si las dos derivadas parciales de  $X$

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \quad y \quad \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

tomado en componentes son vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^3$  para todo  $(u, v) \in U$ .

### Ejemplo (El toro $T^2$ )

El toro  $T^2 \subset \mathbb{R}^3$  de rotación con radios  $R > r > 0$  es la imagen

$$T^2 := X(\mathbb{R}^2)$$

de la parametrización suave y regular, pero no biyectiva:

$$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} (R + r \cos v) \cos u \\ (R + r \cos v) \sin u \\ r \sin v \end{pmatrix}$$

### Definición (Superficies en $\mathbb{R}^3$ )

Una superficie (suave) en  $\mathbb{R}^3$  es un subconjunto cerrado  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , tal que por todo punto  $p \in \Sigma$  existe una vecindad  $V \subset \mathbb{R}^3$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  (¡sic!) y una parametrización suave, regular y biyectiva:

$$X: U \xrightarrow{\cong} \Sigma \cap V, \quad (u, v) \mapsto X(u, v)$$

¡Es muy importante que  $X$  es sobreyectiva, no vamos a permitir, que algunos puntos en  $\Sigma \cap V$  no son parametrizados de  $X$ !

## Nota (Superficies con autointersecciones)

*También se puede definir superficies  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  con autointersecciones.*

*Cada punto en una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  con autointersecciones es contenido en un número finito de “ramos” de la superficie.*

*Formalmente reemplazamos la condición de inyectividad de la parametrización regular suave  $X$  con la condición, que todo punto en  $\Sigma \cap V$  tiene solamente un número finito de preimagenes en  $U$ .*

# Las Curvaturas Principales



## Nota (Objetivo de la plática)

*Queremos desarrollar una medida, las dos curvaturas principales, para la torsión de una superficie  $\Sigma \in \mathbb{R}^3$  en cada uno de sus puntos  $p \in \Sigma$ .*

*Idealmente esta medida nos permite identificar la geometría local de la superficie  $\Sigma$  alrededor de su punto  $p$ .*

## Nota (Objetivo de la plática)

*Queremos desarrollar una medida, las dos curvaturas principales, para la torsión de una superficie  $\Sigma \in \mathbb{R}^3$  en cada uno de sus puntos  $p \in \Sigma$ .*

*Idealmente esta medida nos permite identificar la geometría local de la superficie  $\Sigma$  alrededor de su punto  $p$ .*

## Nota (Propiedades indispensables)

- *Invarianza bajo reparametrización:*

*Las curvaturas principales en un punto  $p \in \Sigma$  no dependen de la parametrización  $X : U \rightarrow \Sigma$  elegida para calcularlas.*

- *Invarianza bajo isometrías de  $\mathbb{R}^3$ :*

*Si  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una isometría de  $\mathbb{R}^3$ , entonces las curvaturas principales de  $\Phi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$  en el punto  $\Phi(p)$  son iguales a las curvaturas principales de  $\Sigma$  en  $p \in \Sigma$ .*

## Estrategia

Para definir las curvaturas principales de una superficie vamos a empezar con un caso más simple, la curvatura (principal) de una curva en  $\mathbb{R}^2$ .

## Estrategia

Para definir las curvaturas principales de una superficie vamos a empezar con un caso más simple, la curvatura (principal) de una curva en  $\mathbb{R}^2$ .

## Definición (Orientación estándar de $\mathbb{R}^2$ )

*La identificación del plano  $\mathbb{R}^2$  con los números complejos*

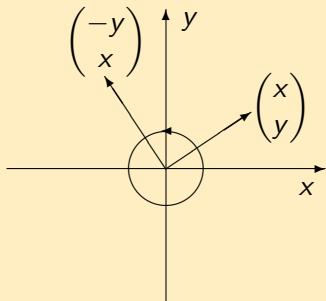
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + iy$$

*induce la orientación estándar de  $\mathbb{R}^2$ . En esta orientación la rotación por el ángulo  $+90^\circ$  es la multiplicación escalar con  $i$ :*

$$C: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v$$

Ejemplo (Orientación estándar de  $\mathbb{R}^2$ )

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## Definición (Curvas regulares en $\mathbb{R}^2$ )

Una curva regular en el plano  $\mathbb{R}^2$  es una aplicación suave

$$X : U \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad u \longmapsto X(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}$$

definido en un intervalo abierto  $U \subset \mathbb{R}$ , tal que para todo  $u \in U$ :

$$\frac{dX}{du}(u) = X'(u) := \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \end{pmatrix} \neq 0$$

## Definición (Curvas regulares en $\mathbb{R}^2$ )

Una curva regular en el plano  $\mathbb{R}^2$  es una aplicación suave

$$X : U \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad u \longmapsto X(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}$$

definido en un intervalo abierto  $U \subset \mathbb{R}$ , tal que para todo  $u \in U$ :

$$\frac{dX}{du}(u) = X'(u) := \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \end{pmatrix} \neq 0$$

## Definición (Mapeo de Gauß asociado)

El mapeo de Gauß asociado a una curva regular  $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$  es:

$$N : U \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2, \quad u \longmapsto C \frac{X'(u)}{\|X'(u)\|}$$

### Definición (La curva extendida)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $u \mapsto X(u)$ , una curva regular in  $\mathbb{R}^2$ .

Sea  $N : U \rightarrow S^1$ ,  $u \mapsto N(u)$ , su mapeo de Gauß asociado.

Entonces podemos definir la curva extendida  $X^{\text{ext}}$  de la curva  $X$ :

$$X^{\text{ext}} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, t) \mapsto X(u) + tN(u)$$



### Definición (La curva extendida)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $u \mapsto X(u)$ , una curva regular in  $\mathbb{R}^2$ .

Sea  $N : U \rightarrow S^1$ ,  $u \mapsto N(u)$ , su mapeo de Gauß asociado.

Entonces podemos definir la curva extendida  $X^{\text{ext}}$  de la curva  $X$ :

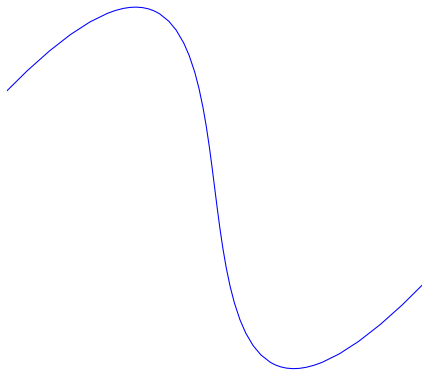
$$X^{\text{ext}} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, t) \mapsto X(u) + tN(u)$$

### Ejemplo (Una curva regular)

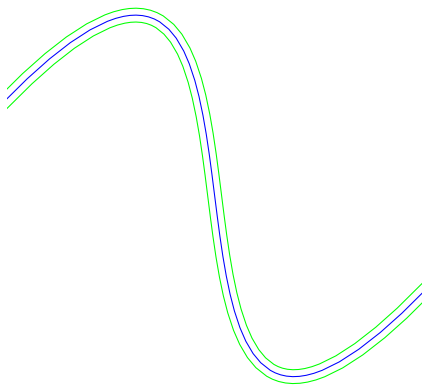
Consideramos la curva regular:

$$X : ]-3, +3[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}u^3 - 4u \end{pmatrix}$$

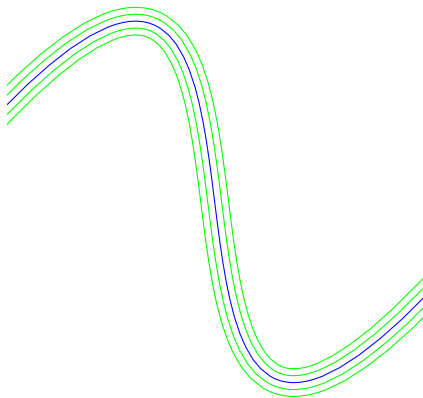
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=0..0)],  
-5..5,-5..5,color=[green$0,blue,green$0],axes=None);
```



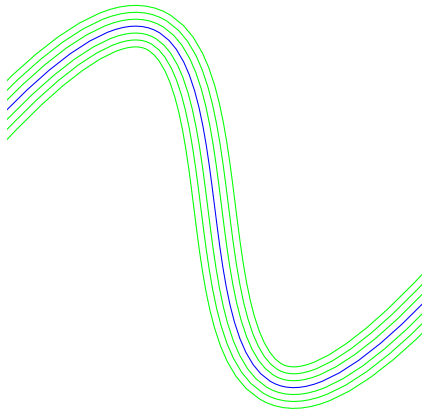
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-1..1)],  
-5..5,-5..5,color=[green$1,blue,green$1],axes=None);
```



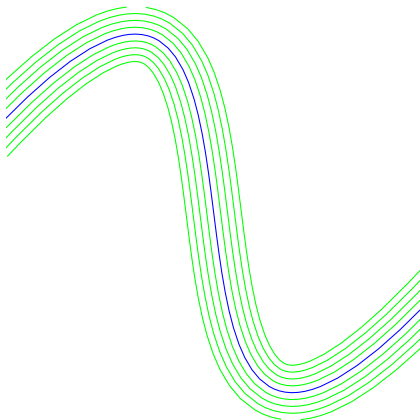
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-2..2)],  
-5..5,-5..5,color=[green$2,blue,green$2],axes=None);
```



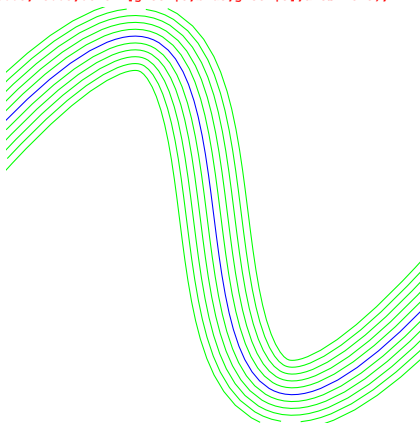
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-3..3)],  
-5..5,-5..5,color=[green$3,blue,green$3],axes=None);
```



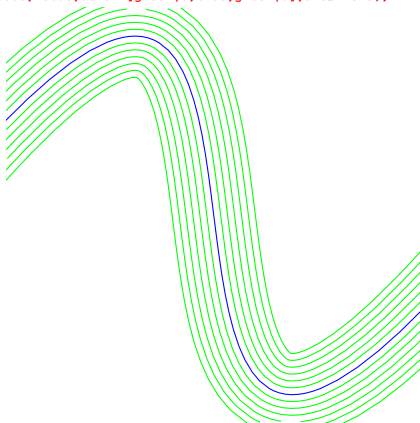
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-4..4)],  
-5..5,-5..5,color=[green$4,blue,green$4],axes=None);
```



```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-5..5)],  
-5..5,-5..5,color=[green$5,blue,green$5],axes=None);
```

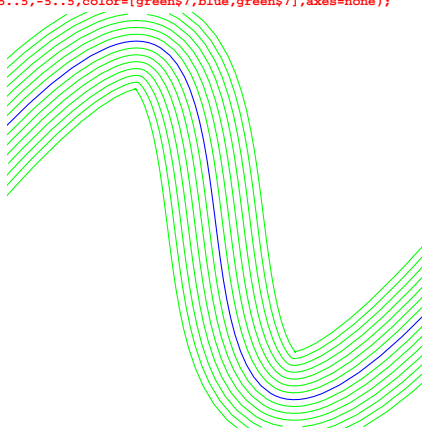


```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-6..6)],  
-5..5,-5..5,color=[green$6,blue,green$6],axes=None);
```

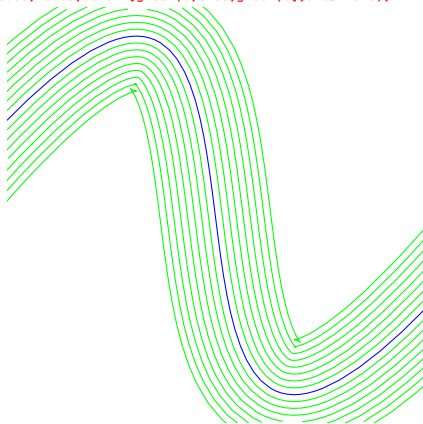




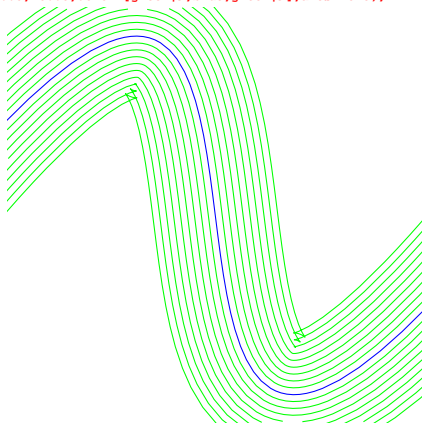
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-7..7)],  
-5..5,-5..5,color=[green$7,blue,green$7],axes=None);
```



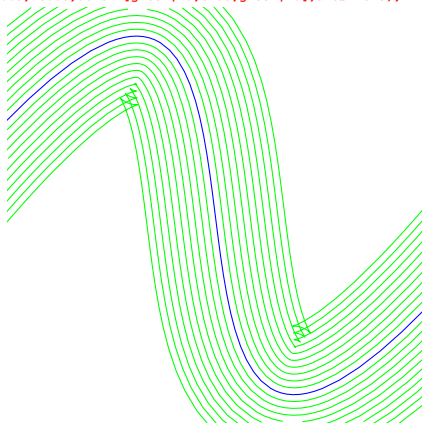
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u)));  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-8..8)],  
-5..5,-5..5,color=[green$8,blue,green$8],axes=None);
```



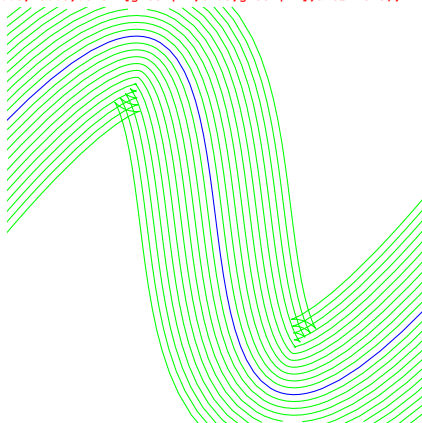
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u))):  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-9..9)],  
-5..5,-5..5,color=[green$9,blue,green$9],axes=None);
```



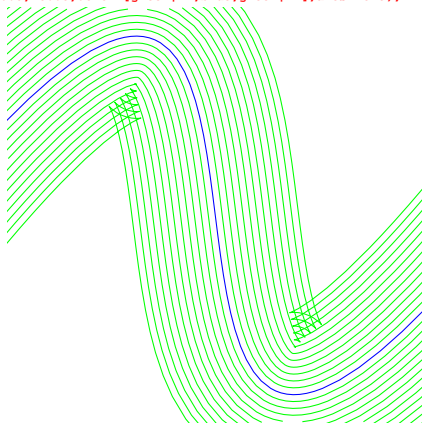
```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2):  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]):  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u))):  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-10..10)],  
-5..5,-5..5,color=[green$10,blue,green$10],axes=None);
```



```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2):  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]):  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u))):  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-11..11)],  
-5..5,-5..5,color=[green$11,blue,green$11],axes=None);
```



```
> Normalize:=(v)->evalm(v/sqrt(v[1]^2+v[2]^2));  
> X:=vector([u^3/4+u/2,u^3/2-4*u]);  
> N:=evalm(matrix([[0,-1],[1,0]])&*Normalize(map(diff,X,u))):  
> plot([seq([op(convert(evalm(X+t/6*N),list)),u=-3..3],t=-12..12)],  
-5..5,-5..5,color=[green$12,blue,green$12],axes=None);
```



## Observación (Valores singulares de la curva extendida)

*Lo más cerca la singularidad de la curva extendida*

$$(u, t) \mapsto X^{\text{ext}}(u, t)$$

*en que no es un difeomorfismo, es al punto  $X(u) = X(u, 0)$ ,*

*¡lo más torcida es la curva en  $X(u)$ !*

*Entonces una buena definición de la curvatura de una curva es*

$$\text{curvatura (principal) de la curva en } X(u) := -\frac{1}{t}$$

*donde  $t \in \mathbb{R}$  es la distancia de  $X(u)$  a la imagen  $X^{\text{ext}}(u, t)$  del punto singular  $(u, t)$  de la curva extendida  $X^{\text{ext}}$ , en que no es un difeomorfismo.*

## Definición (Curvatura de una curva regular)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular con curva extendida

$$X^{\text{ext}} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, t) \mapsto X^{\text{ext}}(u, t)$$

Si  $X^{\text{ext}}$  no es un difeomorfismo en un punto  $(u, t) \in U \times \mathbb{R}$ :

$$\text{curvatura (principal) de la curva en } X(u) := -\frac{1}{t}$$



### Definición (Curvatura de una curva regular)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular con curva extendida

$$X^{\text{ext}} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, t) \mapsto X^{\text{ext}}(u, t)$$

Si  $X^{\text{ext}}$  no es un difeomorfismo en un punto  $(u, t) \in U \times \mathbb{R}$ :

$$\text{curvatura (principal) de la curva en } X(u) := -\frac{1}{t}$$

### Nota (La curvatura de una curva es bien definida)

En seguida vamos a probar, que para cada  $u \in U$  existe por lo más un  $t \in \mathbb{R}$ , tal que  $X^{\text{ext}}$  no es un difeomorfismo en  $(u, t)$ .

Si para  $u \in U$  existe ningún  $t \in \mathbb{R}$ , tal que  $X^{\text{ext}}$  es singular en  $(u, t)$ , entonces la curvatura iguala 0 en  $u \in U$ .

## Problema (¿Que hacemos en el caso de superficies?)

Para definir las curvaturas principales de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  necesitamos elegir una parametrización  $X : U \rightarrow \Sigma$  de una vecindad de un punto  $p \in \Sigma$  y un mapeo de Gauß asociado

$$N : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto N(u, v)$$

que satisface las dos propiedades:

## Problema (¿Que hacemos en el caso de superficies?)

Para definir las curvaturas principales de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  necesitamos elegir una parametrización  $X : U \rightarrow \Sigma$  de una vecindad de un punto  $p \in \Sigma$  y un mapeo de Gauß asociado

$$N : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto N(u, v)$$

que satisface las dos propiedades:

- $N(u, v)$  tiene norma 1 en todo punto  $(u, v) \in U$ .

## Problema (¿Que hacemos en el caso de superficies?)

Para definir las curvaturas principales de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  necesitamos elegir una parametrización  $X : U \rightarrow \Sigma$  de una vecindad de un punto  $p \in \Sigma$  y un mapeo de Gauß asociado

$$N : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto N(u, v)$$

que satisface las dos propiedades:

- $N(u, v)$  tiene norma 1 en todo punto  $(u, v) \in U$ .
- $N(u, v)$  es ortogonal a los vectores tangenciales:

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \quad y \quad \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

## Definición (Espacio tangente de una superficie)

El espacio tangente  $T_p\Sigma$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  en  $p \in \Sigma$

$$T_p\Sigma := \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(u, v), \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \right\} \stackrel{?}{=} \{ N(u, v) \}^{\perp}$$

no depende de la parametrización regular  $X : U \rightarrow \Sigma$  de una vecindad de  $p$  elegida y es de dimensión dos, ya que los vectores

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \quad \text{y} \quad \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

son linealmente independientes. En particular la línea complementaria  $\mathbb{R} N(u, v) = (T_p\Sigma)^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$  generada por  $N(u, v)$  es completamente determinada por  $\Sigma$ .

¡Así la condición que tenga norma 1 determina  $N(u, v)$  salvo signo!

## Nota (Ambigüedad del mapeo de Gauß)

*¡Si  $N : U \rightarrow S^2$  es un mapeo de Gauß asociado a una parametrización  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , entonces*

$$-N : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto -N(u, v)$$

*es también un mapeo de Gauß!*

*Entonces todas las definiciones, que usan el mapeo de Gauß en una manera no trivial tendrán una ambigüedad inherente, que viene de la ambigüedad del mapeo de Gauß.*

*Ésta ambigüedad no existió en  $\mathbb{R}^2$  gracias a la orientación estándar de  $\mathbb{R}^2$  y el hecho que cada curva es automáticamente orientada del pasado al futuro.*

## Lema (Existencia de un mapeo de Gauß)

*Para toda parametrización regular  $X : U \rightarrow \Sigma$  de una superficie  $\Sigma$  existe un mapeo de Gauß  $N$  asociado suave. Una construcción del mapeo de Gauß lo define cómo la composición*

$$N := \text{normalizar} \circ N^{\approx}$$

*del mapeo de Gauß aproximado  $N^{\approx}$*

$$U \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad (u, v) \mapsto \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

*donde  $\times$  es el producto cruz en  $\mathbb{R}^3$ , con la normalización:*

$$\text{normalizar} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^2, \quad v \mapsto \frac{v}{\|v\|}$$

## Definición (El mapeo extendido por superficies)

Sea  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $N : U \rightarrow S^2$  un mapeo de Gauß asociado. Definimos el mapeo extendido  $X^{\text{ext}}$  como antes:

$$X^{\text{ext}} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v, t) \mapsto X(u, v) + tN(u, v)$$



### Definición (El mapeo extendido por superficies)

Sea  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $N : U \rightarrow S^2$  un mapeo de Gauß asociado. Definimos el mapeo extendido  $X^{\text{ext}}$  como antes:

$$X^{\text{ext}} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v, t) \mapsto X(u, v) + tN(u, v)$$

### Definición (Curvaturas principales de una superficie $\Sigma$ )

Sea  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y  $N : U \rightarrow S^2$  un mapeo de Gauß asociado.

Para todo punto  $(u, v) \in U$  existen por lo más dos tiempos  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , tal que  $X^{\text{ext}}$  no es un difeomorfismo en  $(u, v, t_\mu)$ .

Las curvaturas principales  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  de la superficie  $\Sigma$  en un punto  $p = X(u, v)$  son inversamente proporcional a estos tiempos:

$$k_1 := -\frac{1}{t_1} \quad \text{y} \quad k_2 := -\frac{1}{t_2}$$

## Ejemplo (Curvaturas principales de la esfera $S_r^2$ )

Sea  $X : U \rightarrow S_r^2 \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una parte de la esfera  $S_r^2$  del radio  $r > 0$ . Podemos elegir el mapeo de Gauß

$$N : U \rightarrow S^2, \quad (u, v) \mapsto \frac{1}{r} X(u, v)$$

por que el vector  $X(u, v)$  es ortogonal a los dos vectores  $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$  y  $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$ . El mapeo extendido de la parametrización  $X$

$$X^{\text{ext}} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v, t) \mapsto \left(1 + \frac{t}{r}\right) X(u, v)$$

solamente falta de estar un difeomorfismo por  $1 + \frac{t}{r} = 0$ , es decir  $t = -r$ . Entonces las curvaturas principales en cada punto de la esfera  $S_r^2$  son igual a  $\frac{1}{r}$ .

Observación ( $\frac{\partial N}{\partial u}$  y  $\frac{\partial N}{\partial v}$  son vectores tangenciales)

De su definición el vector normal  $N(u, v) \in S^2$  tiene norma 1 en todo punto  $(u, v) \in U$ , entonces obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( N(u, v)^T N(u, v) \right) = 0 = N(u, v)^T \frac{\partial N}{\partial u}(u, v)$$

y con el mismo argumento  $N(u, v)^T \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) = 0$ , es decir:

$$\frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \in T_p \Sigma$$

## Lema (Rango de la matriz jacobiana I)

La matriz jacobiana ó diferencial  $DX^{\text{ext}}(u, v, t)$  del mapeo extendido  $X^{\text{ext}}$  en un punto  $(u, v, t) \in U \times \mathbb{R}$  es dado por:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) + t \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) + t \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) & N(u, v) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

En particular el rango de la matriz jacobiana es igual a:

$$\text{rango } DX^{\text{ext}}(u, v, t) = 1 + \dim \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial X}{\partial u} + t \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} + t \frac{\partial N}{\partial v} \right\}$$

## Lema (Rango de la matriz jacobiana I)

La matriz jacobiana ó diferencial  $DX^{\text{ext}}(u, v, t)$  del mapeo extendido  $X^{\text{ext}}$  en un punto  $(u, v, t) \in U \times \mathbb{R}$  es dado por:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) + t \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) + t \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) & N(u, v) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

En particular el rango de la matriz jacobiana es igual a:

$$\text{rango } DX^{\text{ext}}(u, v, t) = 1 + \dim \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial X}{\partial u} + t \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} + t \frac{\partial N}{\partial v} \right\}$$

## Conclusión

¡Para calcular las curvaturas principales de una superficie  $\Sigma$  en un punto  $X(u, v) \in \Sigma$  necesitamos matrices y álgebra lineal!

## Definición (Primera y segunda forma fundamental)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Para cada punto  $p = X(u, v)$  de  $\Sigma$  definimos las matrices  $3 \times 2$

$$DX(u, v) := \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$DN(u, v) := \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

y la primera y segunda forma fundamental de  $\Sigma$  en  $p$ :

$$I(u, v) := DX(u, v)^T DX(u, v)$$

$$II(u, v) := DX(u, v)^T DN(u, v)$$

### Observación (Primera forma fundamental)

*En una parametrización  $X$  regular los vectores  $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$  y  $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$  son linealmente independientes por todos  $(u, v) \in U$ . Entonces  $DX(u, v)$  tiene rango 2 y la primera forma fundamental  $I(u, v)$  es simétrica y definida positiva, en particular  $I(u, v)$  es invertible.*

### Observación (Primera forma fundamental)

*En una parametrización  $X$  regular los vectores  $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$  y  $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$  son linealmente independientes por todos  $(u, v) \in U$ . Entonces  $DX(u, v)$  tiene rango 2 y la primera forma fundamental  $I(u, v)$  es simétrica y definida positiva, en particular  $I(u, v)$  es invertible.*

### Corolario (Rango de la matriz jacobiana II)

*El rango de la matriz jacobiana  $DX^{\text{ext}}(u, v, t)$  del mapeo extendido  $X^{\text{ext}}$  en un punto  $(u, v, t) \in U \times \mathbb{R}$  se puede calcular como:*

$$\begin{aligned} \text{rango } DX^{\text{ext}}(u, v, t) &= 1 + \text{rango} [DX(u, v) + tDN(u, v)] \\ &= 1 + \text{rango} [I(u, v) + tII(u, v)] \\ &= 3 - \dim \ker [id_{2 \times 2} + tI^{-1}(u, v)II(u, v)] \end{aligned}$$



## Teorema (Curvaturas principales de una superficie $\Sigma$ )

Sea  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y  $I(u, v)$  y  $II(u, v)$  la primera y segunda forma fundamental de  $\Sigma$  en un punto  $(u, v) \in U$ :

## Teorema (Curvaturas principales de una superficie $\Sigma$ )

Sea  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y  $I(u, v)$  y  $II(u, v)$  la primera y segunda forma fundamental de  $\Sigma$  en un punto  $(u, v) \in U$ :

- La primera forma fundamental  $I(u, v)$  es simétrica, definida positiva e invertible.

## Teorema (Curvaturas principales de una superficie $\Sigma$ )

Sea  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y  $I(u, v)$  y  $II(u, v)$  la primera y segunda forma fundamental de  $\Sigma$  en un punto  $(u, v) \in U$ :

- La primera forma fundamental  $I(u, v)$  es simétrica, definida positiva e invertible.
- La segunda forma fundamental  $II(u, v)$  es simétrica.

## Teorema (Curvaturas principales de una superficie $\Sigma$ )

Sea  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y  $I(u, v)$  y  $II(u, v)$  la primera y segunda forma fundamental de  $\Sigma$  en un punto  $(u, v) \in U$ :

- La primera forma fundamental  $I(u, v)$  es simétrica, definida positiva e invertible.
- La segunda forma fundamental  $II(u, v)$  es simétrica.
- El llamado operador de forma o aplicación de Weingarten

$$S(u, v) := I^{-1}(u, v) II(u, v)$$

es diagonalizable.

## Teorema (Curvaturas principales de una superficie $\Sigma$ )

Sea  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y  $I(u, v)$  y  $II(u, v)$  la primera y segunda forma fundamental de  $\Sigma$  en un punto  $(u, v) \in U$ :

- La primera forma fundamental  $I(u, v)$  es simétrica, definida positiva e invertible.
- La segunda forma fundamental  $II(u, v)$  es simétrica.
- El llamado operador de forma o aplicación de Weingarten

$$S(u, v) := I^{-1}(u, v) II(u, v)$$

es diagonalizable.

- Las curvaturas principales de  $\Sigma$  en  $X(u, v) \in \Sigma$  son exactamente los valores propios de la aplicación de Weingarten  $S(u, v)$  con multiplicidades.

Nota (¿Por que la aplicación de Weingarten es diagonalizable?)

*Para demostrar que  $S = I^{-1} II$  es diagonalizable aplicamos un teorema de Álgebra Lineal famoso y bien interesante.*

*Por razones históricas y su importancia en la teoría de movimientos de cuerpos sólidos se llama el Teorema de inercia.*

*En los libros sobre álgebra lineal en general solamente tratan el caso especial  $A = \text{id}_{m \times m}$  del teorema general formulado en seguida, ¡sin embargo ésta asunción adicional no facilita la demostración en ninguna manera!*

## Teorema (Teorema de inercia o Teorema de Sylvester)

Sean  $A$  y  $B$  matrices simétricas  $m \times m$  con coeficientes reales, y sea  $A$  además definida positiva, es decir que para todo  $x \in \mathbb{R}^m$  no cero es verdad que  $x^T A x > 0$ . Entonces  $A$  es invertible y la matriz  $S := A^{-1} B$  es diagonalizable.

Además podemos elegir una base de vectores propios  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$  de  $S$  con valores propios  $k_1, \dots, k_m$ , que es una base  $A$ -ortonormal en el sentido:

$$v_\mu^T A v_\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

A fortiori ésta base es entonces  $B$ -ortogonal:

$$v_\mu^T B v_\nu = v_\mu^T A S v_\nu = \begin{cases} k_\mu & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

### Ejemplo (Curvaturas principales de la gráfica de una función I)

Recordamos que la gráfica  $\Sigma_f \subset \mathbb{R}^3$  de una función suave  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto f(u, v)$ , tiene una parametrización global:

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma_f \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

Pensamos un rato para adivinar un mapeo de Gauß asociado:

$$N : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2, \quad (u, v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } f\|^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \\ -1 \end{pmatrix}$$



## Ejemplo (Curvaturas principales de la gráfica de una función II)

$$DX(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

$$DN(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } f\|^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u}(u, v) & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}(u, v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*+ términos de poca importancia (¿por que?)*

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

$$II(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } f\|^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u}(u, v) & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

### Ejemplo (Curvaturas principales de la gráfica de una función III)

En un punto crítico  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  de la función  $f$ , en donde el gradiente  $\text{grad} f = 0$  se anula, la primera y segunda forma fundamental están dados por:

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$II(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u}(u, v) & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

En este sentido la segunda forma fundamental es una generalización de la matriz hessiana de una función en un punto crítico. En particular la gráfica  $\Sigma_f \subset \mathbb{R}^3$  de la función

$$f(u, v) := \frac{1}{2} a u^2 + \frac{1}{2} b v^2$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  tiene curvaturas principales  $a, b$  en el origen  $0 \in \Sigma_f$ .

## Definición (Isometrías de $\mathbb{R}^3$ )

*Una isometría del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación  $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , que preserva la distancia entre dos puntos  $p, q \in \mathbb{R}^3$  cualesquiera:*

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathbb{R}^3}(\Phi(p), \Phi(q)) &:= \|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\| \\ &= \text{dist}_{\mathbb{R}^3}(p, q) \end{aligned}$$

## Definición (Isometrías de $\mathbb{R}^3$ )

Una isometría del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación  $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , que preserva la distancia entre dos puntos  $p, q \in \mathbb{R}^3$  cualesquiera:

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathbb{R}^3}(\Phi(p), \Phi(q)) &:= \|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\| \\ &= \text{dist}_{\mathbb{R}^3}(p, q) \end{aligned}$$

## Lema (Clasificación de Isometrías)

Toda isometría  $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$  es de la forma

$$\Phi(p) = Ap + a$$

con una matriz ortogonal  $A \in \text{Mat}_{3 \times 3} \mathbb{R}$ , que satisface  $A^T A = \text{id}_{3 \times 3}$ , y un vector de translación  $a \in \mathbb{R}^3$ .

### Observación (Superficies e isometrías)

Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y  $\Phi(p) = Ap + a$  una isometría de  $\mathbb{R}^3$ . Además sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de la parte  $X(U) \subset \Sigma$  de la superficie.

Entonces la imagen de  $\Sigma$  bajo  $\Phi$  es una superficie  $\Phi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$  y

$$AX + a : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto AX(u, v) + a$$

es una parametrización de la parte  $\Phi(X(U))$  de ésta superficie.

Sea además  $N : U \rightarrow S^2$  un mapeo de Gauß asociado a  $X$ , entonces el mapeo  $AN : U \rightarrow S^2$  es un mapeo de Gauß asociado a la parametrización regular  $AX + a$ .

## Observación (Invarianza bajo isometrías)

Consideramos una isometría  $\Phi(p) = Ap + a$  de  $\mathbb{R}^3$  con una matriz ortogonal  $A$  y un vector de translación  $a \in \mathbb{R}^3$ . Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces tenemos por la parametrización regular  $AX + a$  de la superficie  $\Phi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$  con mapeo de Gauß  $AN$  asociado:

$$D(AX + a)(u, v) = A DX(u, v)$$

$$D(AN)(u, v) = A DN(u, v)$$

Así la primera y segunda forma fundamental de  $\Phi(\Sigma)$  están:

$$\begin{aligned} I^\Phi(u, v) &= D(AX + a)^T(u, v) D(AX + a)(u, v) \\ &= DX^T(u, v) \underbrace{A^T A}_{= \text{id}_{3 \times 3}} DX(u, v) = I(u, v) \end{aligned}$$

$$II^\Phi(u, v) = D(AN)^T(u, v) D(AN)(u, v) = II(u, v)$$

Es decir, que la aplicación de Weingarten  $S^\Phi = S$  no ha cambiado.

## Observación (Invarianza bajo reparametrización I)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y sea  $\varphi$  un difeomorfismo

$$\varphi : \tilde{U} \rightarrow U, \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (u, v)$$

entre los abiertos  $U$  y  $\tilde{U}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces la composición

$$\tilde{X} : \tilde{U} \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{X} \mathbb{R}^3, \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto \tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v})$$

es otra parametrización regular de la misma parte  $\tilde{X}(\tilde{U}) = X(U)$  de  $\Sigma$ . La regla de cadenas aplicada a  $\tilde{X} = X \circ \varphi$  asegura que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) + \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) + \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{aligned}$$

### Observación (Invarianza bajo reparametrización II)

Entonces el espacio tangencial en el punto  $p = X(u, v) = \tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v})$

$$\begin{aligned} T_p \Sigma &= \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(u, v), \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \right\} \\ &\stackrel{!}{=} \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}), \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right\} \end{aligned}$$

no depende de la parametrización elegida para  $\Sigma$ . En particular

$$\tilde{N} : \tilde{U} \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{N} \mathbb{R}^3, \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto \tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v})$$

es una aplicación de Gauß para  $\tilde{X}$ , donde  $N : U \rightarrow S^2$  es una aplicación de Gauß para  $X$ .



## Observación (Invarianza bajo reparametrización III)

En términos de la matriz Jacobiana invertible del difeomorfismo  $\varphi$

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{pmatrix}$$

la regla de cadenas calculada antes se puede escribir en la forma

$$D\tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v}) = DX(u, v) J(\tilde{u}, \tilde{v})$$

$$D\tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) = DN(u, v) J(\tilde{u}, \tilde{v})$$

donde de segunda fórmula sigue de la analogía entre  $\tilde{X} = X \circ \varphi$  y  $\tilde{N} = N \circ \varphi$ . Entonces la primera y segunda forma fundamental  $\tilde{I}$  y  $\tilde{II}$  para  $\tilde{X}$  están dados por:

$$\tilde{I}(\tilde{u}, \tilde{v}) = J(\tilde{u}, \tilde{v})^T I(u, v) J(\tilde{u}, \tilde{v})$$

$$\tilde{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) = J(\tilde{u}, \tilde{v})^T II(u, v) J(\tilde{u}, \tilde{v})$$

### Observación (Invarianza bajo reparametrización III)

*En consecuencia los valores propios de la primera forma fundamental no define un concepto, que no depende de la parametrización, por que los valores propios de  $I(u, v)$  y  $\tilde{I}(\tilde{u}, \tilde{v})$  son diferentes en general.*

*Por la misma razón los valores propios de  $II(u, v)$  tampoco nos sirven para definir un concepto geoméricamente interesante.*

*Sin embargo la aplicación de Weingarten sí se cambia*

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\tilde{u}, \tilde{v}) &:= \left( J(\tilde{u}, \tilde{v})^T I(u, v) J(\tilde{u}, \tilde{v}) \right)^{-1} J(\tilde{u}, \tilde{v})^T II(u, v) J(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= J(\tilde{u}, \tilde{v})^{-1} \left( I(u, v)^{-1} II(u, v) \right) J(\tilde{u}, \tilde{v})\end{aligned}$$

*por una conjugación bajo reparametrización, por eso las dos matrices  $\tilde{S}(\tilde{u}, \tilde{v})$  y  $S(u, v)$  tienen los mismos valores propios con exactamente las mismas multiplicidades.*

## Teorema (Universalidad de gráficas)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de una parte  $X(U)$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Para todo punto  $p \in X(u, v)$  existe una isometría  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^3$  y una reparametrización  $\varphi : \tilde{V} \rightarrow V$  de una vecindad  $V$  de  $(u, v)$  en  $U$ , tal que la parametrización regular

$$\tilde{X} := \Phi \circ X \circ \varphi : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es la gráfica de una función  $f : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Además podemos asumir que  $(0, 0) \in \tilde{V}$  es un punto crítico para la función  $f$  y la imagen de este punto crítico es  $\tilde{X}(0, 0) = \Phi(p) = 0$ .

Entonces la invarianza de las curvaturas principales nos dice que las curvaturas principales de  $\Sigma$  en  $p$  son exactamente los valores propios de la matriz Hessiana de la función  $f$  en su punto crítico.

## Definición (Curvatura media y curvatura de Gauß)

Sean  $k_1$  y  $k_2$  las curvaturas principales de una superficie  $\Sigma$  en un punto  $p \in \Sigma$ . Entonces la curvatura media  $H$  y la curvatura de Gauß  $\kappa$  en  $p \in \Sigma$  son definidos como:

$$H := k_1 + k_2 \quad \kappa := k_1 \cdot k_2$$

Si cambiamos el mapeo de Gauß  $N \rightsquigarrow -N$ , entonces las curvaturas principales cambian el signo  $k_1 \rightsquigarrow -k_1$ ,  $k_2 \rightsquigarrow -k_2$ . En particular la curvatura media  $H$  cambia signo también, pero  $\kappa$  no.

### Definición (Curvatura media y curvatura de Gauß)

Sean  $k_1$  y  $k_2$  las curvaturas principales de una superficie  $\Sigma$  en un punto  $p \in \Sigma$ . Entonces la curvatura media  $H$  y la curvatura de Gauß  $\kappa$  en  $p \in \Sigma$  son definidos como:

$$H := k_1 + k_2 \quad \kappa := k_1 \cdot k_2$$

Si cambiamos el mapeo de Gauß  $N \rightsquigarrow -N$ , entonces las curvaturas principales cambian el signo  $k_1 \rightsquigarrow -k_1$ ,  $k_2 \rightsquigarrow -k_2$ . En particular la curvatura media  $H$  cambia signo también, pero  $\kappa$  no.

### Definición (Superficies minimales y superficies CMC)

Una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  se llama minimal, si su curvatura media  $H = 0$  se anula en todo punto  $p \in \Sigma$ .

Más general podemos estudiar superficies  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  de curvatura media constante, también llamadas superficies CMC, donde la curvatura media  $H$  no depende del punto  $p \in \Sigma$ .

# El Teorema Egregio

Nota (¿Que es el teorema egregio?)

*El teorema egregio es un teorema fundamental de la geometría Riemanniana y junto con el teorema de Gauß–Bonnet es el logro lo más importante de la geometría diferencial de finales del siglo 19.*

## Teorema (Teorema egregio I)

*La curvatura de Gauß  $\kappa$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , es decir el producto de los dos valores propios de la aplicación de Weingarten  $S := I^{-1}II$ , se puede calcular sin conocer la segunda forma fundamental  $II$  solamente de la primera forma fundamental.*

*Más preciso el teorema dice, que se puede calcular el valor de la curvatura de Gauß de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  con parametrización regular  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  en  $p = X(u, v)$  solamente de los valores de los coeficientes de la primera forma fundamental*

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} I_{uu}(u, v) & I_{uv}(u, v) \\ I_{vu}(u, v) & I_{vv}(u, v) \end{pmatrix}$$

*y de sus primeras y segundas derivadas parciales con respecto a  $u, v$  en  $(u, v) \in U$ .*



## Teorema (Teorema egregio II)

En términos de los llamados símbolos de Christoffel definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu,\lambda}(u, v) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial I_{\nu\lambda}}{\partial \mu}(u, v) - \frac{\partial I_{\mu\nu}}{\partial \lambda}(u, v) + \frac{\partial I_{\lambda\mu}}{\partial \nu}(u, v) \right)$$

para índices  $\mu, \nu, \lambda \in \{u, v\}$  cualesquiera la fórmula explícita, pero bastante incomprensible, para la curvatura de Gauß es:

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{1}{\det I} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_{vv}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 I_{uv}}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_{uu}}{\partial v^2} \right) \\ & - \frac{1}{\det^2 I} \left( + I_{vv} \Gamma_{uu,u} \Gamma_{vv,u} - I_{vv} \Gamma_{uv,u} \Gamma_{vu,u} \right. \\ & \quad - I_{uv} \Gamma_{uu,u} \Gamma_{vv,v} + I_{uv} \Gamma_{uv,u} \Gamma_{vu,v} \\ & \quad - I_{vu} \Gamma_{uu,v} \Gamma_{vv,u} + I_{vu} \Gamma_{uv,v} \Gamma_{vu,u} \\ & \quad \left. + I_{uu} \Gamma_{uu,v} \Gamma_{vv,v} - I_{uu} \Gamma_{uv,v} \Gamma_{vu,v} \right) \end{aligned}$$

## Nota (Idea de la demostración)

*Para demostrar el teorema egregio necesitamos dos lemas técnicos, que no son particularmente difícil que demostrar. Sin embargo ambos lemas tienen un interés independiente del teorema egregio.*

*El primer lema extiende la identidad de Parseval para bases ortonormales  $E_1, \dots, E_m$  de  $\mathbb{R}^m$ , es decir la igualdad*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{\mu=1}^m \langle X, E_{\mu} \rangle \langle E_{\mu}, Y \rangle$$

*para todo  $X, Y \in \mathbb{R}^m$ , a bases generales de  $\mathbb{R}^m$ .*

*El segundo lema da una interpretación geométrica a los símbolos de Christoffel definidos antes.*

## Lema (Identidad de Parseval I)

Sea  $E_1, \dots, E_m$  una base general de  $\mathbb{R}^m$ , no necesariamente una base ortonormal con respecto al producto escalar estándar  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . La matriz de Gram asociada a ésta base es la matriz  $m \times m$  simétrica y definida positiva:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{m1} & \vdots & G_{mm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle E_1, E_1 \rangle & \dots & \langle E_1, E_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle E_m, E_1 \rangle & \vdots & \langle E_m, E_m \rangle \end{pmatrix}$$

Así mismo sean  $G^{\mu\nu}$  los coeficientes de la matriz inversa  $G^{-1}$  en renglón  $\mu$ , columna  $\nu$ . Para cualquier  $A, B \in \mathbb{R}^m$  es verdad que:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{\mu, \nu=1}^m G^{\mu\nu} \langle A, E_\mu \rangle \langle E_\nu, B \rangle$$

## Demostración (Identidad de Parseval II)

Para empezar definimos  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\langle\langle A, B \rangle\rangle := \sum_{\mu, \nu=1}^m G^{\mu\nu} \langle A, E_\mu \rangle \langle E_\nu, B \rangle$$

Se verifique fácilmente que  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  es una forma bilineal y simétrica, por que  $G^{-1}$  es una matriz simétrica como  $G$ . Entonces el problema se reduce a demostrar  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . Encontramos

$$\begin{aligned} \langle\langle A, E_\lambda \rangle\rangle &= \sum_{\mu, \nu=1}^m G^{\mu\nu} \langle A, E_\mu \rangle \langle E_\nu, E_\lambda \rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^m \left( \sum_{\nu=1}^m G^{\mu\nu} G_{\nu\lambda} \right) \langle A, E_\mu \rangle \end{aligned}$$

## Demostración (Identidad de Parseval III)

*Pero la suma interior iguala por definición 0 o 1, más preciso:*

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^m G^{\mu\nu} G_{\nu\lambda} &= \text{coeficiente de } G^{-1} G \text{ en renglon } \mu, \text{ columna } \lambda \\ &= \delta_{\mu=\lambda} := \begin{cases} 1 & \mu = \lambda \\ 0 & \mu \neq \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

*Entonces concluimos para todo  $A \in \mathbb{R}^m$  y  $\lambda = 1, \dots, m$ :*

$$\langle\langle A, E_\lambda \rangle\rangle = \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu=\lambda} \langle A, E_\mu \rangle = \langle A, E_\lambda \rangle$$

*Ambos lados de ésta identidad son lineales en sus argumentos, así la identidad se queda verdad para cualquier combinación lineal  $B \in \mathbb{R}^m$  de los vectores de la base  $E_1, \dots, E_m$ .* □

## Lema (Símbolos de Christoffel I)

Consideramos una parametrización regular  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Los coeficientes de la primera forma fundamental  $I := DX^T DX$  asociada son productos escalares

$$I_{\mu\nu}(u, v) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \mu}(u, v), \frac{\partial X}{\partial \nu}(u, v) \right\rangle$$

para todos índices  $\mu, \nu \in \{u, v\}$ . De manera similar definimos los símbolos de Christoffel para índices  $\mu, \nu, \lambda \in \{u, v\}$  como:

$$\Gamma_{\mu\nu, \lambda}(u, v) := \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \mu \partial \nu}(u, v), \frac{\partial X}{\partial \lambda}(u, v) \right\rangle$$

Los símbolos de Christoffel se puede calcular de las primeras derivadas de los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\Gamma_{\mu\nu, \lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial I_{\nu\lambda}}{\partial \mu} - \frac{\partial I_{\mu\nu}}{\partial \lambda} + \frac{\partial I_{\lambda\mu}}{\partial \nu} \right)$$

## Demostración (Símbolos de Christoffel II)

Ésta demostración es una calculación simple basada en la regla de Leibniz para el producto escalar estándar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \langle A, B \rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial \mu}, B \right\rangle + \left\langle A, \frac{\partial B}{\partial \mu} \right\rangle$$

todo índice  $\mu \in \{u, v\}$  y todas aplicaciones suaves  $A, B$  de  $U$  a  $\mathbb{R}^3$ . Así obtenemos para cualquier índices  $\mu, \nu, \lambda \in \{u, v\}$

$$\begin{aligned} + \frac{\partial I_{\nu\lambda}}{\partial \mu} &= + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \mu \partial \nu}, \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \mu \partial \lambda}, \frac{\partial X}{\partial \nu} \right\rangle \\ - \frac{\partial I_{\mu\nu}}{\partial \lambda} &= - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda \partial \mu}, \frac{\partial X}{\partial \nu} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda \partial \nu}, \frac{\partial X}{\partial \mu} \right\rangle \\ + \frac{\partial I_{\lambda\mu}}{\partial \nu} &= + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \nu \partial \lambda}, \frac{\partial X}{\partial \mu} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \nu \partial \mu}, \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right\rangle \end{aligned}$$

y tomando la suma verificamos la fórmula para  $\Gamma_{\mu\nu, \lambda}$ . □

## Demostración (Teorema egregio III)

*En un primer paso usamos la regla de Leibniz por el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para reformular la definición de la segunda forma fundamental en una manera, que hace su simetría evidente:*

$$\begin{aligned}
 II &= DX^T DN \\
 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \rangle \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{!}{=} - \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u}, N \rangle & \langle \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}, N \rangle \\ \langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, N \rangle & \langle \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial v}, N \rangle \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

*De hecho  $N$  es ortogonal a  $\frac{\partial X}{\partial u}$  y  $\frac{\partial X}{\partial v}$  y por eso por ejemplo:*

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, N \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, N \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, N \right\rangle$$



## Demostración (Teorema egregio IV)

*En el segundo paso recordamos que la curvatura de Gauß es el producto de los dos valores propios de la aplicación de Weingarten  $S := I^{-1} II$ , es decir su determinante. Usando la multiplicatividad del determinante obtenemos una primera simplificación:*

$$\begin{aligned}
 \kappa &:= \det \left( I^{-1} II \right) \\
 &= \frac{\det II}{\det I} \\
 &= \frac{1}{\det I} \left( \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u}, N \right\rangle \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial v} \right\rangle \right. \\
 &\quad \left. - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, N \right\rangle \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \right\rangle \right)
 \end{aligned}$$

## Demostración (Teorema egregio V)

Ahora la idea esencial es utilizar la identidad de Parseval para cambiar ambos productos escalares  $\langle A, N \rangle \langle N, B \rangle$  a cosas más manejables. La matriz de Gram de la base  $N, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}$  es igual a:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{uu} & I_{uv} \\ 0 & I_{vu} & I_{vv} \end{pmatrix}$$

así su inverso es dado por:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & + \frac{I_{vv}}{\det I} & - \frac{I_{uv}}{\det I} \\ 0 & - \frac{I_{vu}}{\det I} & + \frac{I_{uu}}{\det I} \end{pmatrix}$$

## Demostración (Teorema egregio VI)

Entonces la identidad de Parseval asegura para  $A, B \in \mathbb{R}^3$  que:

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \langle A, N \rangle \langle N, B \rangle + \frac{I_{vv}}{\det I} \left\langle A, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \left\langle B, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \\ &\quad - \frac{I_{uv}}{\det I} \left\langle A, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \left\langle B, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \\ &\quad - \frac{I_{vu}}{\det I} \left\langle A, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \left\langle B, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \\ &\quad + \frac{I_{uu}}{\det I} \left\langle A, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \left\langle B, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \end{aligned}$$

Aparentemente podemos resolver ésta identidad para los productos escalares  $\langle A, N \rangle \langle N, B \rangle$  que nos interesan para las parejas:

$$\left( \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial v} \right) \quad y \quad \left( \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \right)$$

## Demostración (Teorema egregio VII)

*Tomando la interpretación geométrica de los símbolos de Christoffel*

$$\Gamma_{\mu\nu,\lambda} = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \mu \partial \nu}, \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right\rangle$$

*en cuenta obtenemos una primera versión del teorema egregio:*

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{1}{\det I} \left( \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \right\rangle \right) \\ & - \frac{1}{\det^2 I} \left( \begin{aligned} & + I_{vv} \Gamma_{uu,u} \Gamma_{vv,u} - I_{vv} \Gamma_{uv,u} \Gamma_{vu,u} \\ & - I_{uv} \Gamma_{uu,u} \Gamma_{vv,v} + I_{uv} \Gamma_{uv,u} \Gamma_{vu,v} \\ & - I_{vu} \Gamma_{uu,v} \Gamma_{vv,u} + I_{vu} \Gamma_{uv,v} \Gamma_{vu,u} \\ & + I_{uu} \Gamma_{uu,v} \Gamma_{vv,v} - I_{uu} \Gamma_{uv,v} \Gamma_{vu,v} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

## Demostración (Teorema egregio VIII)

*Para acabar con la demostración del teorema egregio falta aplicar la regla de Leibniz dos veces para calcular las segundas derivadas parciales de los coeficientes de la primera forma fundamental:*

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial^2 I_{uu}}{\partial v \partial v} &= -2 \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial u \partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u \partial v} \right\rangle \\
 + 2 \frac{\partial^2 I_{uv}}{\partial u \partial v} &= +2 \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial u \partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u}, \frac{\partial X}{\partial v \partial v} \right\rangle \\
 &\quad + 2 \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial u \partial v \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right\rangle \\
 - \frac{\partial^2 I_{vv}}{\partial u \partial u} &= -2 \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial u \partial v \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u \partial v} \right\rangle
 \end{aligned}$$

*Por un milagro todos los términos, que involucran tercera derivadas de  $X$ , se cancelan en la suma final, que es exactamente dos veces el término que nos faltaba para demostrar el teorema egregio.  $\square$*

# La Variación de Área

## Pregunta (Mi pregunta favorita para confundir estudiantes)

*¿Que es la diferencia entre una aplicación y una función?*

*Advertencia: La respuesta refleja mi opinión, aunque creo que una gran mayoría de matemátic@s son conscientes, por lo menos intuitivamente, de la diferencia sutil entre los dos conceptos.*

*¡Uds. tienen todo el derecho rechazar mi opinión, pero no lo hagan antes de pensarlo bien!*

## Pregunta (Mi pregunta favorita para confundir estudiantes)

*¿Que es la diferencia entre una aplicación y una función?*

*Advertencia: La respuesta refleja mi opinión, aunque creo que una gran mayoría de matemátic@s son conscientes, por lo menos intuitivamente, de la diferencia sutil entre los dos conceptos.*

*¡Uds. tienen todo el derecho rechazar mi opinión, pero no lo hagan antes de pensarlo bien!*

## Nota (Desgraciadamente...)

*Todos los libros básicos escritos originalmente en español usan las palabras aplicación y función sin discriminación. Por cierto es no es el caso en libros básicos escritos en inglés o en alemán, o que son traducidos de estas lenguas.*



## Definición (Aplicaciones y mapeos)

*Una aplicación, también llamado un mapeo, es un triple*

$$\varphi = (A, B, \Gamma)$$

*de conjuntos con  $\Gamma \subset A \times B$ , que satisface el siguiente axioma:*

*Para cualquier  $a \in A$  existe un y solamente un  $b \in B$  tal que*

$$(a, b) \in \Gamma$$

*El conjunto  $A$  se llama el dominio, el conjunto  $B$  el codominio y el conjunto  $\Gamma$  la gráfica de la aplicación  $\varphi$ . Además  $b$  se llama la imagen de  $a$  bajo  $\varphi$  y se suele escribir la declaración en la forma:*

$$\varphi: A \longrightarrow B, \quad a \longmapsto b$$

## Definición (Funciones)

*Una función es una aplicación  $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ , tal que*

*¡Su codominio  $\mathbb{K}$  es un campo, digamos  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ,*

*o por lo menos un anillo asociativo y conmutativo con  $\mathbf{1}$  como  $\mathbb{Z}$ !*

## Definición (Funciones)

*Una función es una aplicación  $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ , tal que*

*¡Su codominio  $\mathbb{K}$  es un campo, digamos  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ,*

*o por lo menos un anillo asociativo y conmutativo con  $\mathbf{1}$  como  $\mathbb{Z}$ !*

## Nota (Álgebras de Funciones)

*El aviso decisivo de ésta definición de una función es, que*

*¡Siempre podemos sumar, restar y multiplicar funciones!*

*Al contrario aplicaciones arbitrarias solamente podemos componer.*

## Definición (Funciones)

*Una función es una aplicación  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ , tal que*

*¡Su codominio  $\mathbb{K}$  es un campo, digamos  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ,*

*o por lo menos un anillo asociativo y conmutativo con  $\mathbf{1}$  como  $\mathbb{Z}$ !*

## Nota (Álgebras de Funciones)

*El aviso decisivo de ésta definición de una función es, que*

*¡Siempre podemos sumar, restar y multiplicar funciones!*

*Al contrario aplicaciones arbitrarias solamente podemos componer.*

## Definición (Funcionales)

*Un funcional es una función  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ , tal que:*

*¡Su dominio  $A$  es un conjunto de aplicaciones!*

## Nota (Cálculo de Variaciones)

- *El Cálculo de Variaciones se trata del problema de determinar extremos, mínimos ó máximos, de un funcional, en nuestro caso el funcional del área.*

## Nota (Cálculo de Variaciones)

- *El Cálculo de Variaciones se trata del problema de determinar extremos, mínimos ó máximos, de un funcional, en nuestro caso el funcional del área.*
- *El problema es, que los argumentos de un funcional no son puntos en  $\mathbb{R}^m$ , sino aplicaciones. En nuestro caso por ejemplo son las parametrizaciones  $X$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ .*

## Nota (Cálculo de Variaciones)

- *El Cálculo de Variaciones se trata del problema de determinar extremos, mínimos ó máximos, de un funcional, en nuestro caso el funcional del área.*
- *El problema es, que los argumentos de un funcional no son puntos en  $\mathbb{R}^m$ , sino aplicaciones. En nuestro caso por ejemplo son las parametrizaciones  $X$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ .*
- *Los funcionales, que se puede tratar con el Cálculo de Variaciones, tienen en común, que sus definiciones inevitablemente involucran una integración.*

## Nota (Cálculo de Variaciones)

- *El Cálculo de Variaciones se trata del problema de determinar extremos, mínimos ó máximos, de un funcional, en nuestro caso el funcional del área.*
- *El problema es, que los argumentos de un funcional no son puntos en  $\mathbb{R}^m$ , sino aplicaciones. En nuestro caso por ejemplo son las parametrizaciones  $X$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ .*
- *Los funcionales, que se puede tratar con el Cálculo de Variaciones, tienen en común, que sus definiciones inevitablemente involucran una integración.*
- *El gradiente de una función utilizado en el cálculo clásico para encontrar puntos críticos es remplazado en el Cálculo de Variaciones con la variación del funcional estudiado.*



## Nota (Cálculo de Variaciones)

- *El Cálculo de Variaciones se trata del problema de determinar extremos, mínimos ó máximos, de un funcional, en nuestro caso el funcional del área.*
- *El problema es, que los argumentos de un funcional no son puntos en  $\mathbb{R}^m$ , sino aplicaciones. En nuestro caso por ejemplo son las parametrizaciones  $X$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ .*
- *Los funcionales, que se puede tratar con el Cálculo de Variaciones, tienen en común, que sus definiciones inevitablemente involucran una integración.*
- *El gradiente de una función utilizado en el cálculo clásico para encontrar puntos críticos es remplazado en el Cálculo de Variaciones con la variación del funcional estudiado.*
- *Esta variación se anula en un punto crítico como el gradiente en el cálculo clásico.*

### Observación (Área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$ )

*El área del paralelogramo  $P(v, w)$  generado por dos vectores  $v, w \in \mathbb{R}^3$  en el espacio se puede calcular utilizando la fórmula:*

$$\begin{aligned} \text{Área}^2 P(v, w) &= \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2 \angle(v, w) \\ &= \|v\|^2 \|w\|^2 - \|v\|^2 \|w\|^2 \cos^2 \angle(v, w) \\ &= \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Nota (La primera forma fundamental)

*Recordamos que la primera forma fundamental fue definida así:*

$$I(u, v) = DX(u, v)^T DX(u, v) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix}$$

*Entonces es verdad que:*

$$\det I(u, v) = \text{Área}^2 P \left( \frac{\partial X}{\partial u}(u, v), \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \right)$$

## Nota (La primera forma fundamental)

Recordamos que la primera forma fundamental fue definida así:

$$I(u, v) = DX(u, v)^T DX(u, v) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix}$$

Entonces es verdad que:

$$\det I(u, v) = \text{Área}^2 P \left( \frac{\partial X}{\partial u}(u, v), \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \right)$$

## Definición (Área de una superficie)

Dado una parametrización  $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  de una parte de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y un subconjunto compacto  $K \subset U$  el área de la parte compacta  $X(K) \subset \Sigma$  de la superficie es definido como:

$$\text{Área } X(K) := \int_K \sqrt{\det I(u, v)} \, du \, dv$$

## Definition (Variación de una superficie)

Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una superficie. Una familia  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  de superficies

$$\Sigma_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$$

parametrizada por un parámetro de variación  $\varepsilon \in U_0 \subset \mathbb{R}$  en un intervalo abierto  $U_0 \ni 0$  se llama una variación de  $\Sigma$ , si y solamente si  $\Sigma_0 = \Sigma$  y existen aplicaciones suaves

$$X : U \times U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v, \varepsilon) \longmapsto X(u, v, \varepsilon)$$

que son parametrizaciones regulares comunes de todas las superficies en la familia en el sentido que para cada  $\varepsilon \in U_0$  fijo la aplicación suave especializada

$$X_\varepsilon : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto X(u, v, \varepsilon)$$

es una parametrización regular de la superficie  $\Sigma_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ .

### Observación (Variación del área I)

Sea  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  una variación de la superficie  $\Sigma = \Sigma_0 \subset \mathbb{R}^3$  y  $X$  una parametrización común para todas las superficies de la variación con especialización:

$$X_\varepsilon : U \longrightarrow \Sigma_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto X(u, v, \varepsilon)$$

Además sea  $I_\varepsilon(u, v)$  la primera forma fundamental de  $\Sigma_\varepsilon$  en un punto  $(u, v) \in U$  y  $K \subset U$  un subconjunto compacto, entonces:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{Área } X_\varepsilon(K) = \int_K \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sqrt{\det I_\varepsilon(u, v)} \, du \, dv$$

### Observación (Variación del área I)

Sea  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  una variación de la superficie  $\Sigma = \Sigma_0 \subset \mathbb{R}^3$  y  $X$  una parametrización común para todas las superficies de la variación con especialización:

$$X_\varepsilon : U \longrightarrow \Sigma_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto X(u, v, \varepsilon)$$

Además sea  $I_\varepsilon(u, v)$  la primera forma fundamental de  $\Sigma_\varepsilon$  en un punto  $(u, v) \in U$  y  $K \subset U$  un subconjunto compacto, entonces:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{Área } X_\varepsilon(K) = \int_K \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sqrt{\det I_\varepsilon(u, v)} \, du \, dv$$

### Problema (¿Que es la derivada del determinante?)

¡Para hacer algun progreso debemos calcular la derivada del determinante de la primera forma fundamental  $I_\varepsilon(u, v)$  de  $\Sigma_\varepsilon$ !

## Lema (Derivada del determinante I)

$$\frac{d}{d\varepsilon} \det \begin{pmatrix} a(\varepsilon) & b(\varepsilon) \\ c(\varepsilon) & d(\varepsilon) \end{pmatrix} = \operatorname{tr} \left[ \begin{pmatrix} +d(\varepsilon) & -b(\varepsilon) \\ -c(\varepsilon) & +a(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'(\varepsilon) & b'(\varepsilon) \\ c'(\varepsilon) & d'(\varepsilon) \end{pmatrix} \right]$$



## Lema (Derivada del determinante I)

$$\frac{d}{d\varepsilon} \det \begin{pmatrix} a(\varepsilon) & b(\varepsilon) \\ c(\varepsilon) & d(\varepsilon) \end{pmatrix} = \operatorname{tr} \left[ \begin{pmatrix} +d(\varepsilon) & -b(\varepsilon) \\ -c(\varepsilon) & +a(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'(\varepsilon) & b'(\varepsilon) \\ c'(\varepsilon) & d'(\varepsilon) \end{pmatrix} \right]$$

## Observación (Matriz de cofactores y matriz inversa)

*La matriz de cofactores o la matriz de adjuntos de una matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2 \times 2} \mathbb{R}$$

*es la matriz:*

$$A^{\text{cofactor}} := \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix} = (\det A) A^{-1}$$

*La última igualdad asume que la matriz original  $A$  sea invertible.*

## Teorema (Derivada del determinante II)

Sea  $A : U_0 \rightarrow \text{Mat}_{m \times m} \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \mapsto A(\varepsilon)$ , una aplicación diferenciable con valores en las matrices reales  $m \times m$ .

La derivada de la función inducida  $\varepsilon \mapsto \det A(\varepsilon)$  en  $\varepsilon = 0$  es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \det A(\varepsilon) &= \text{tr} \left( A(0)^{\text{cofactor}} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} A \right) \\ &= \det A(0) \text{tr} \left( A(0)^{-1} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} A \right) \end{aligned}$$

La última igualdad es solamente verdad, si  $A(0)$  es invertible.

## Corolario (Variación del raíz del determinante)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \sqrt{\det I_\varepsilon(u, v)} \\ &= \frac{\det I(u, v)}{2 \sqrt{\det I(u, v)}} \operatorname{tr} \left[ I(u, v)^{-1} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} I_\varepsilon(u, v) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( I(u, v)^{-1} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} I_\varepsilon(u, v) \right) \sqrt{\det I(u, v)} \end{aligned}$$

### Corolario (Variación del raíz del determinante)

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sqrt{\det I_\varepsilon(u, v)} &= \frac{\det I(u, v)}{2 \sqrt{\det I(u, v)}} \operatorname{tr} \left[ I(u, v)^{-1} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} I_\varepsilon(u, v) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( I(u, v)^{-1} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} I_\varepsilon(u, v) \right) \sqrt{\det I(u, v)}
 \end{aligned}$$

### Nota (Curvatura media $H$ es una traza)

De su definición la curvatura media  $H_p$  en un punto  $p = X(u, v)$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  es la suma de las dos curvaturas principales en  $p$ , es decir la suma de los dos valores propios de la aplicación de Weingarten  $S(u, v) = I(u, v)^{-1} II(u, v)$ :

$$H(u, v) = \operatorname{tr} ( I(u, v)^{-1} II(u, v) )$$

## Corolario (Variación del área II)

Sea  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  una variación de la superficie  $\Sigma = \Sigma_0 \subset \mathbb{R}^3$  con parametrización regular común  $X$  y especialización:

$$X_\varepsilon : U \longrightarrow \Sigma_\varepsilon, \quad (u, v) \longmapsto X(u, v, \varepsilon)$$

Además sea  $I_\varepsilon(u, v)$  la primera forma fundamental de  $\Sigma_\varepsilon$  en un punto  $(u, v) \in U$  y  $K \subset U$  un subconjunto compacto. Entonces:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{Área } X_\varepsilon(K) \\ &= \frac{1}{2} \int_K \text{tr} \left( I(u, v)^{-1} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} I_\varepsilon(u, v) \right) \sqrt{\det I(u, v)} \, du \, dv \end{aligned}$$

## Nota (Variaciones normales de superficies I)

*Una construcción elegante para obtener variaciones de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  usa la aplicación extendida*

$$X^{\text{ext}} : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v, t) \longmapsto X(u, v) + t N(u, v)$$

*asociada a una parametrización regular  $X : U \longrightarrow \Sigma$  de una parte de  $\Sigma$ . Elegimos un compacto  $K \subset U$  y un intervalo abierto  $U_0 \subset \mathbb{R}$  simétrico sobre  $0 \in U_0$  tan chiquito, que*

$$\text{rango } DX^{\text{ext}}(u, v, t) = 3$$

*para todo  $(u, v) \in K$  y  $t \in U_0$ . Además elegimos una función suave  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$  con soporte en  $K$  y acotado  $|f| \leq 1$ .*

## Definición (Variaciones normales de una superficie II)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , además sea  $K \subset U$  un compacto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  suave con soporte en  $U$  y acotado  $|f| \leq 1$ . Finalmente sea  $U_0 \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto simétrico sobre  $0 \in U_0$ , tal que para  $(u, v) \in K$  y  $t \in U_0$ :

$$\text{rango } DX^{\text{ext}}(u, v, t) = 3$$

La variación normal de  $\Sigma$  asociada es la familia de superficies

$$\Sigma_\varepsilon := X_\varepsilon(U) \cup \left( \Sigma \setminus X(U) \right)$$

con parámetro  $\varepsilon \in U_0$ , en donde:

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(u, v) = X(u, v, \varepsilon) &:= X^{\text{ext}}(u, v, \varepsilon f(u, v)) \\ &= X(u, v) + \varepsilon f(u, v) N(u, v) \end{aligned}$$

## Lema (Variación de la primera forma fundamental)

Para cualquier variación normal  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  asociada a una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  calculamos la matriz

$$DX_\varepsilon(u, v) = DX(u, v) + \varepsilon f(u, v) DN(u, v) + \varepsilon N(u, v) (\text{grad } f)^T(u, v)$$

usando  $(\text{grad } f)^T(u, v) := \left( \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right)$ . En particular:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(u, v) &= DX(u, v)^T DX(u, v) \\ &\quad + \varepsilon DX(u, v)^T \left[ f(u, v) DN(u, v) + N(u, v) (\text{grad } f)^T(u, v) \right] \\ &\quad + \varepsilon \left[ f(u, v) DN(u, v) + N(u, v) (\text{grad } f)^T(u, v) \right]^T DX(u, v) \\ &\quad + O(\varepsilon^2) \\ &= I(u, v) + 2\varepsilon f(u, v) II(u, v) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$



### Teorema (Variación del área III)

Sea  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  una variación normal de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  asociada a una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  acotada  $|f| \leq 1$  con soporte compacto  $K \subset U$ .

La variación del área bajo ésta variación normal es dado por:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{Área } X_\varepsilon(K) \\ &= \int_K f(u, v) \underbrace{\text{tr} \left( I(u, v)^{-1} II(u, v) \right)}_{= H(u, v)} \sqrt{\det I(u, v)} \, du \, dv \end{aligned}$$

### Teorema (Variación del área III)

Sea  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  una variación normal de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  asociada a una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  acotada  $|f| \leq 1$  con soporte compacto  $K \subset U$ .

La variación del área bajo ésta variación normal es dado por:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{Área } X_\varepsilon(K) \\ = \int_K f(u, v) \underbrace{\text{tr} \left( I(u, v)^{-1} II(u, v) \right)}_{= H(u, v)} \sqrt{\det I(u, v)} \, du \, dv \end{aligned}$$

### Corolario (Superficies minimales y variación del área)

Si una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  tiene un punto  $p \in \Sigma$  con curvatura media  $H_p \neq 0$  diferente a cero, entonces existe una variación normal  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  de  $\Sigma$  con área más pequeño.

## Demostración (Superficies minimales y variación del área)

Sea  $p \in \Sigma$  un punto, donde la curvatura media  $H_p \neq 0$  es diferente a 0. Entonces podemos elegir una parametrización  $X : U \rightarrow \Sigma$  de una vecindad  $X(U) \subset \Sigma$  de  $p$  y un mapeo  $N : U \rightarrow S^2$  de Gauß asociado, tal que la curvatura media  $H_p$  en el punto  $p$  es positiva.

In consecuencia existe una vecindad  $V \subset U$  de  $X^{-1}(p)$ , tal que la curvatura media  $H > 0$  es positiva en  $V$ . Por toda función suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  con soporte en un subconjunto compacto  $K \subset V$ ,  $f$  acotado  $|f| \leq 1$  y no idénticamente igual a 0, obtenemos bajo la variación normal  $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in U_0}$  asociada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \text{Área } X_\varepsilon(K) \\ = \int_K \underbrace{f(u, v)}_{\geq 0} \underbrace{H(u, v)}_{> 0} \underbrace{\sqrt{\det I(u, v)}}_{> 0} du dv > 0 \end{aligned}$$

## Nota (Lema de Du Bois–Reymond)

*La demostración del corolario es un argumento muy característico, esencialmente el mismo argumento aparece en casi toda aplicación del Cálculo de Variaciones.*

*¡Así el corolario es un caso particular del llamado Lema de Du Bois–Reymond o*

*Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones!*

# Parametrización de Enneper–Weierstraß

## Nota (Bosquejo de la idea de Enneper–Weierstraß)

- *La idea principal de Enneper–Weierstraß es de utilizar la relación fuerte entre geometría conforme y geometría compleja en dimensión dos. En dimensiones más altas que dos no quedan ni trazas de ésta relación.*

## Nota (Bosquejo de la idea de Enneper–Weierstraß)

- *La idea principal de Enneper–Weierstraß es de utilizar la relación fuerte entre geometría conforme y geometría compleja en dimensión dos. En dimensiones más altas que dos no quedan ni trazas de ésta relación.*
- *La parte lo más técnica en la construcción de Enneper–Weierstraß establece, que toda superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  tiene parametrizaciones conformes.*

## Nota (Bosquejo de la idea de Enneper–Weierstraß)

- *La idea principal de Enneper–Weierstraß es de utilizar la relación fuerte entre geometría conforme y geometría compleja en dimensión dos. En dimensiones más altas que dos no quedan ni trazas de ésta relación.*
- *La parte lo más técnica en la construcción de Enneper–Weierstraß establece, que toda superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  tiene parametrizaciones conformes.*
- *La relación entre geometría conforme y geometría compleja convierte el problema de existencia de parametrizaciones conformes al problema de existencia de una función holomorfa no-trivial. La existencia de funciones holomorfas para geometrías complejas fue estudiada por Riemann.*



## Nota (Bosquejo de la idea de Enneper–Weierstraß)

- *La idea principal de Enneper–Weierstraß es de utilizar la relación fuerte entre geometría conforme y geometría compleja en dimensión dos. En dimensiones más altas que dos no quedan ni trazas de ésta relación.*
- *La parte lo más técnica en la construcción de Enneper–Weierstraß establece, que toda superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  tiene parametrizaciones conformes.*
- *La relación entre geometría conforme y geometría compleja convierte el problema de existencia de parametrizaciones conformes al problema de existencia de una función holomorfa no-trivial. La existencia de funciones holomorfas para geometrías complejas fue estudiada por Riemann.*
- *Finalmente se demuestre que el diferencial de una parametrización conforme de una superficie minimal es una aplicación holomorfa de la superficie a la cuádriga.*

## Definición (Definición clásica de funciones holomorfas)

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f(z)$ , una función de una variable compleja  $z = u + iv$  ó de sus partes  $u, v \in \mathbb{R}$  reales y imaginarias definida en un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{C}$ .

La función  $f$  se llama complejamente diferenciable en un punto  $z \in U$ , si el siguiente límite existe

$$f'(z) := \lim_{\substack{h \in \mathbb{C}^* \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

independiente de la manera, cómo  $h \in \mathbb{C}^*$  converge en los números complejos sin cero a  $0 \in \mathbb{C}$ .

Una función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  se llama holomorfa, si y solamente si es complejamente diferenciable en cada punto  $z \in U$ .

## Nota (Funciones analíticas)

*En la literatura española las funciones holomorfas se llaman en general funciones analíticas. Ésta convención causa varios problemas, ya que por el resto del mundo matemático una función analítica es otra cosa.*

## Nota (Funciones analíticas)

*En la literatura española las funciones holomorfas se llaman en general funciones analíticas. Ésta convención causa varias problemas, ya que por el resto del mundo matemático una función analítica es otra cosa.*

## Relación con la diferenciabilidad

Aunque la definición de funciones holomorfas es en su texto casi idéntico a la definición de funciones diferenciables, ¡el concepto de holomorphicidad es de hecho muchísimo más fuerte que el concepto de diferenciabilidad.

La razón por ésta discrepancia es, que en los números reales sin cero  $\mathbb{R}^*$  hay esencialmente dos maneras para converger a  $0 \in \mathbb{R}$ , de la izquierda ó de la derecha, mientras en los números complejos sin cero  $\mathbb{C}^*$  se pueda converger en muchísimas maneras a  $0 \in \mathbb{C}$ .

¡Investigamos las consecuencia de ésta observación!

## Observación (Derivadas parciales de una función holomorfa)

Si una función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definida en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  es complejamente diferenciable en  $z = u + iv$ , entonces es parcialmente diferenciable con respecto a los componentes reales  $u, v \in \mathbb{R}$  de  $z$ .

Más preciso es verdad, que:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u + iv) := \lim_{\substack{t \in \mathbb{R}^* \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(z + t) - f(z)}{t} = f'(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(u + iv) &:= \lim_{\substack{t \in \mathbb{R}^* \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(z + it) - f(z)}{t} \\ &= i \lim_{\substack{t \in \mathbb{R}^* \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(z + it) - f(z)}{it} = i f'(z) \end{aligned}$$

## Definición (Cálculo de Wirtinger)

Cada función holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definida en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  es parcialmente diferenciable con respecto a los componentes reales  $u, v \in \mathbb{R}$  de  $z = u + iv$  y satisface las ecuaciones básicas del Cálculo de Wirtinger:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u}(z) - i \frac{\partial f}{\partial v}(z) \right) = f'(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u}(z) + i \frac{\partial f}{\partial v}(z) \right) = 0$$

Las llamadas derivadas de Wirtinger son los operadores diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

## Teorema (Ecuaciones de Cauchy–Riemann)

Si al revés una función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definida en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  es continuamente parcialmente diferenciable con respecto a los componentes reales  $u, v \in \mathbb{R}$  de  $z = u + iv$  y satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann para todo  $z \in U$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$$

entonces  $f$  es una función holomorfa. Ésta ecuación se llama ecuaciones, por que se escribe normalmente en términos de dos ecuaciones por la parte real y imaginaria de  $f$ .

Así mismo una función continuamente parcialmente diferenciable  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  se llama una función anti-holomorfa, si y solamente si para todo  $z \in U$ :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = 0$$

### Ejemplo (Filosofía del Cálculo de Wirtinger)

La función  $z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u + iv \mapsto u + iv$ , es holomorfa, pero la función  $\bar{z} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u + iv \mapsto u - iv$ , es anti-holomorfa:

$$\frac{\partial z}{\partial z}(u, v) = 1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}}(u, v) \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}}(u, v) = 0 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}(u, v)$$

En consecuencia es fácil calcular  $\frac{\partial}{\partial z}$  y  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  por todo polinomio, toda función racional y muchas funciones más en  $z$  y  $\bar{z}$ , por que las derivadas de Wirtinger satisfacen las mismas reglas de suma, producto y cadenas como las derivadas verdaderas  $\frac{\partial}{\partial u}$  y  $\frac{\partial}{\partial v}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(z^5 + 3z^2\bar{z}) &= 5z^4 + 6z\bar{z} & \frac{\partial}{\partial z}\exp(z) &= \exp(z) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^5 + 3z^2\bar{z}) &= 3z^2 & \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\exp(z) &= 0 \end{aligned}$$



## Observación (Funciones holomorfas y geometría conforme)

*Curiosamente el concepto de funciones holomorfas es fuertemente relacionado con la geometría conforme en dimensión dos.*

*Grosso modo la geometría conforme es el estudio de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, que preservan el ángulo entre dos vectores cualesquiera no ceros, pero no necesariamente su norma.*

## Observación (Funciones holomorfas y geometría conforme)

*Curiosamente el concepto de funciones holomorfas es fuertemente relacionado con la geometría conforme en dimensión dos.*

*Grosso modo la geometría conforme es el estudio de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, que preservan el ángulo entre dos vectores cualesquiera no ceros, pero no necesariamente su norma.*

## Definition (Productos escalares)

Un producto escalar en un espacio vectorial  $V$  sobre los números reales es una forma simétrica bilineal

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \longmapsto g(v, w)$$

que es definida positiva  $g(v, v) > 0$  para cada  $v \in V$  no cero.

### Ejemplo (Productos escalares en $\mathbb{R}^m$ )

Los productos escalares en  $\mathbb{R}^m$  son en biyección con las matrices  $G \in \text{Mat}_{m \times m} \mathbb{R}$  simétricas y definidas positivas.

Más preciso la aplicación bilineal  $g$  asociada a  $G$  es definido por:

$$g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \longmapsto v^T G w$$

Así la matriz  $\text{id}_{m \times m}$  corresponde al producto escalar estándar:

$$\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_m w_m \stackrel{!}{=} v^T w$$

## Definition (Ángulos entre vectores)

Sea  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  un producto escalar en un espacio vectorial  $V$  sobre los números reales.

La demostración usual de la desigualdad de Cauchy–Schwarz para el producto escalar estándar en  $\mathbb{R}^3$  o más general en  $\mathbb{R}^m$  establece, palabra por palabra, la desigualdad de Cauchy–Schwarz para un producto escalar  $g$ . Es decir, que para dos vectores  $v, w \in V$

$$|g(v, w)| \leq \sqrt{g(v, v) g(w, w)}$$

con igualdad, si y solamente si  $v$  y  $w$  son linealmente dependientes.

En analogía al caso del producto escalar estándar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se define el ángulo entre dos vectores  $v, w \in V$  no ceros con respecto a  $g$  por:

$$\cos \angle(v, w) := \frac{g(v, w)}{\sqrt{g(v, v) g(w, w)}} \in [-1, +1]$$

## Definición (Estructuras conformes)

*Como consecuencia de la definición del ángulo entre dos vectores no ceros observamos que no necesitamos todo un producto escalar para definir ángulos, sino una estructura conforme.*

*Una estructura conforme en un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  es una clase de equivalencia  $[g]$  de productos escalares  $g$ , donde dos productos escalares son declarados equivalentes, si y solamente si son multiples por algun factor real positivo  $F \in \mathbb{R}^+$ :*

$$\hat{g} \sim g \iff \hat{g} = Fg$$

### Ejemplo (Estructuras conformes estándares)

*Los productos escalares estándares en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  inducen estructuras conformes estándares  $[\text{id}_{2 \times 2}]$  y  $[\text{id}_{3 \times 3}]$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .*

*Así mismo los números complejos, visto cómo un espacio vectorial  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{R}$ , tienen una estructura conforme estándar representada por el producto escalar  $g : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(z, w) \mapsto \text{Re}(\bar{z}w)$ .*

## Definición (Aplicaciones conformes)

*Una aplicación conforme entre espacios vectoriales  $V$  y  $W$  con estructuras conformes  $[g_V]$  y  $[g_W]$  respectivamente es una aplicación lineal  $\varphi : V \rightarrow W$  no idénticamente cero, que preserva*

$$\angle(\varphi(v), \varphi(\hat{v})) = \angle(v, \hat{v})$$

*el ángulo entre todos vectores  $v, \hat{v} \in V$  con  $\varphi(v) \neq 0 \neq \varphi(\hat{v})$ .*

## Definición (Aplicaciones conformes)

Una aplicación conforme entre espacios vectoriales  $V$  y  $W$  con estructuras conformes  $[g_V]$  y  $[g_W]$  respectivamente es una aplicación lineal  $\varphi : V \rightarrow W$  no idénticamente cero, que preserva

$$\angle(\varphi(v), \varphi(\hat{v})) = \angle(v, \hat{v})$$

el ángulo entre todos vectores  $v, \hat{v} \in V$  con  $\varphi(v) \neq 0 \neq \varphi(\hat{v})$ .

## Lema (Caracterización de aplicaciones conformes)

Una aplicación lineal  $\varphi : V \rightarrow W$  entre espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  con estructuras conformes  $[g_V]$  y  $[g_W]$  es conforme, si y solamente si existe un  $F \in \mathbb{R}^+$ , tal que para todo  $v, \hat{v} \in V$ :

$$g_W(\varphi(v), \varphi(\hat{v})) = F g_V(v, \hat{v})$$

*¡En particular cualquier aplicación conforme  $\varphi$  es inyectiva!*



## Nota (Orientaciones)

*En general necesitamos el concepto de orientaciones para fijar un signo  $\pm$  en una fórmula.*

*No vamos a definir, que cosa precisa es una orientación, lo único que importa para nosotros es, que todo espacio vectorial sobre los números reales  $\mathbb{R}$  tiene exactamente dos orientaciones distintas. Si  $o = +o$  es una de ellas, entonces escribimos  $-o$  por la otra.*

*¡Es solamente notación!*

*Además los espacios vectoriales estándares  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  tienen orientaciones estándares, que denotaremos  $o_{\mathbb{C}}$ ,  $o_{\mathbb{R}^2}$  etc.*

## Lema (Funciones holomorfas y geometría conforme I)

*Una estructura compleja en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  sobre  $\mathbb{R}$  es una aplicación lineal  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que cuadra a  $C^2 = -\text{id}_{2 \times 2}$ .*

*Hay una biyección canónica entre el conjunto de todas las estructuras complejas y el conjunto de todas las estructuras conformes orientadas en  $\mathbb{R}^2$*

$$C \quad \longleftrightarrow \quad ([G], o)$$

*caracterizada por las ecuaciones:*

$$C^T G + G C = 0 \quad o = (\text{sgn } C_{21}) o_{\mathbb{R}^2}$$

## Lema (Funciones holomorfas y geometría conforme II)

*En fórmulas ésta biyección canónica entre estructuras complejas y estructuras conformes orientadas en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  sobre  $\mathbb{R}$  es dado en una dirección por*

$$C \longmapsto \left( [\text{id}_{2 \times 2} + C^T C], (\text{sgn } C_{21}) o_{\mathbb{R}^2} \right)$$

*y en la otra dirección por:*

$$\left( \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right], \pm o_{\mathbb{R}^2} \right) \longmapsto \pm \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \begin{pmatrix} -b & -c \\ a & b \end{pmatrix}$$

*El criterio de Hurwitz asegura que  $a > 0$  y  $ac - b^2 > 0$ , por que la matriz simétrica  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  es definida positiva por asunción.*

### Ejemplo (La estructura compleja estándar)

*La estructura compleja estándar  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que usamos para definir la curvatura de una curva, ¿recuerdan?, corresponde a la estructura conforme representada por producto escalar estándar:*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \right)$$

Primera llamada, primera...

Regresamos a superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

Primera llamada, primera...

Regresamos a superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

Segunda llamada, segunda...

¡Despertad, se acabo el receso!

## Definición (Cuádrica)

La cuádrica compleja en dimensión 3 es el conjunto de todos los vectores en el espacio vectorial  $\mathbb{C}^3$  de “norma” igual a cero:

$$\mathbf{Q}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{C}^3$$

Se nota que el gradiente  $(2z_1, 2z_2, 2z_3)$  de la condición

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

solamente se anula en la singularidad  $0 \in \mathbf{Q}^3$ , por eso  $\mathbf{Q}^3 \setminus \{0\}$  es una variedad compleja suave de dimensión 2.

Esta variedad es difeomorfo al producto Cartesiano de  $\mathbb{R}^+$  con el espacio real proyectivo  $\mathbf{Q}^3 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}P^3$ . ¡Esperan!

### Observación (Interpretación de la cuádrica I)

Cada vector  $Z \in \mathbb{Q}^3$  en la cuádrica compleja se descompone

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad \operatorname{Re} Z := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \\ \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Re} z_3 \end{pmatrix} \quad \operatorname{Im} Z := \begin{pmatrix} \operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_3 \end{pmatrix}$$

en sus partes reales y complejas tomado en componentes.

Entonces  $\operatorname{Re} Z$  y  $\operatorname{Im} Z$  son dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ , que son ortogonales de la misma norma, por que la condición  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$  implica:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) &= 0 = \|\operatorname{Re} Z\|^2 - \|\operatorname{Im} Z\|^2 \\ \operatorname{Im}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) &= 0 = 2 \langle \operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z \rangle \end{aligned}$$



## Lema (Interpretación de la cuádriga II)

La cuádriga compleja  $\mathbf{Q}^3 \subset \mathbb{C}^3$  en dimensión 3 es en biyección canónica con el conjunto de aplicaciones  $\mathbb{R}$ -lineales conformes de  $\mathbb{C}$  considerado como espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión 2 a  $\mathbb{R}^3$  con respecto a sus estructuras conformes estándares

$$\Psi : \mathbf{Q}^3 \setminus \{0\} \xrightarrow{\cong} \{ \varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \text{ } \mathbb{R}\text{-lineal, conforme} \}$$

via

$$\Psi : Z \mapsto \left( \varphi_Z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \lambda \mapsto \operatorname{Re}(\lambda Z) \right)$$

es decir  $\varphi_Z(1) := \operatorname{Re} Z$  y  $\varphi_Z(i) := -\operatorname{Im} Z$ . En particular la aplicación inversa manda una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal y conforme  $\varphi$  a:

$$\Psi^{-1}(\varphi) := \varphi(1) - i\varphi(i) \in \mathbf{Q}^3$$

Se nota que  $\varphi(1), \varphi(i) \in \mathbb{R}^3$  están vectores ortogonales de la misma norma para cualquier aplicación conforme  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

## Parametrización de Enneper–Weierstraß I

La idea principal de la construcción de la parametrización de Enneper–Weierstraß es de considerar parametrizaciones conformes de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ .

## Teorema (Existencia de parametrizaciones conformes)

*Para cada punto  $p \in \Sigma$  de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  existe un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  y una parametrización regular  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una vecindad  $X(U)$  de  $p$  en  $\Sigma$ , ¡que es una parametrización conforme!*

*Identificamos por de mientras  $z = u + iv$  con el tuplo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  para calcular la primera y segunda forma fundamental de  $X$ .*

*La asunción de conformidad dice, que la primera forma fundamental de  $\Sigma$  en la parametrización regular  $X$  es un un múltiplo de  $\text{id}_{2 \times 2}$  con una función suave positiva  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$ :*

$$I(u, v) = \xi(u, v) \text{id}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \xi(u, v) & 0 \\ 0 & \xi(u, v) \end{pmatrix}$$

## Corolario (Parametrización de Enneper–Weierstraß II)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización conforme de una parte de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces las dos columnas  $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$  y  $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$  de la matriz  $3 \times 2$

$$DX(u, v) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

son dos vectores ortogonales de la misma norma  $\sqrt{f(u, v)}$  en cada punto  $(u, v) \in U$ . Así podemos reemplazar  $DX$  con la aplicación:

$$2 \frac{\partial X}{\partial z} : U \rightarrow \mathbf{Q}^3, \quad (u, v) \mapsto \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) - i \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

## Lema (Lema técnico central I)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización conforme regular de una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces el operador de Laplace

$$\Delta := - \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$$

aplicado componente por componente a  $X$  resulta en

$$(\Delta X)(u, v) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} I(u, v) H(u, v) N(u, v)$$

donde  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  es la curvatura media y  $N$  el mapeo de Gauß elegido para calcularlo.

En particular la parte  $X(U)$  de la superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  es minimal, si y solamente si todos los tres componentes de  $X$  son funciones armónicas  $U \rightarrow \mathbb{R}$ , de que habló Salvador Pérez Esteva.

## Demostración (Lema técnico central II)

Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización conforme y

$$I(u, v) = \begin{pmatrix} \xi(u, v) & 0 \\ 0 & \xi(u, v) \end{pmatrix}$$

su primera forma fundamental con  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Recordamos de la demostración del teorema egregio, que los símbolos de Christoffel se puede calcular de los coeficientes de  $I$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu, \lambda}(u, v) &:= \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \mu \partial \nu}(u, v), \frac{\partial X}{\partial \lambda}(u, v) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial I_{\nu\lambda}}{\partial \mu}(u, v) - \frac{\partial I_{\mu\nu}}{\partial \lambda}(u, v) + \frac{\partial I_{\lambda\mu}}{\partial \nu}(u, v) \right) \end{aligned}$$

para cualquier índices  $\mu, \nu, \lambda \in \{u, v\}$ .

## Demostración (Lema técnico central III)

Así podemos verificar, que  $\Delta X$  es ortogonal a  $\frac{\partial X}{\partial u}$  y  $\frac{\partial X}{\partial v}$  en todo punto  $(u, v) \in U$ . De hecho calculamos por  $\frac{\partial X}{\partial u}$

$$\begin{aligned} & -\left\langle \Delta X(u, v), \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u}(u, v) + \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial v}(u, v), \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \right\rangle \\ &\stackrel{!}{=} \Gamma_{uu, u}(u, v) + \Gamma_{vv, u}(u, v) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial u}(u, v) = 0 \end{aligned}$$

y el argumento por  $\frac{\partial X}{\partial v}$  es muy similar y por eso omitido. Así:

$$\Delta X(u, v) \in \left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(u, v), \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \right\}^\perp = \mathbb{R} N(u, v)$$

### Demostración (Lema técnico central III)

Recordamos ahora que la curvatura media  $H(u, v)$  en un punto  $(u, v) \in U$  es la suma de los dos valores propios de la aplicación de Weingarten  $S(u, v) := I(u, v)^{-1}II(u, v)$ , es decir su traza.

Usando la regla de Leibniz para  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  calculamos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \operatorname{tr} I(u, v) H(u, v) \\
 &= \xi(u, v) \operatorname{tr} \left( \begin{pmatrix} \xi(u, v) & 0 \\ 0 & \xi(u, v) \end{pmatrix}^{-1} DX(u, v)^T DN(u, v) \right) \\
 &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}(u, v), \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}(u, v), \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \right\rangle \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}(u, v), N(u, v) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u, v), N(u, v) \right\rangle \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}(u, v), N(u, v) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u, v), N(u, v) \right\rangle
 \end{aligned}$$



## Demostración (Lema técnico central IV)

*Al otro lado  $N$  es por construcción en todo punto de  $U$  ortogonal a los dos derivadas parciales  $\frac{\partial X}{\partial u}$  y  $\frac{\partial X}{\partial v}$ , es decir las dos funciones*

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, N \right\rangle = 0 = \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, N \right\rangle$$

*se anulan en todo  $U$ . Entonces concluimos eventualmente:*

$$\begin{aligned} \Delta X(u, v) &\stackrel{!}{=} \left\langle \Delta X(u, v), N(u, v) \right\rangle N(u, v) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} I(u, v) H(u, v) N(u, v) \end{aligned}$$



## Nota (Cálculo de Wirtinger)

*Una ventaja particular de las derivadas de Wirtinger*

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

*es que factorizan al operador de Laplace:*

$$\Delta = -4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$$

## Nota (Cálculo de Wirtinger)

*Una ventaja particular de las derivadas de Wirtinger*

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

*es que factorizan al operador de Laplace:*

$$\Delta = -4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$$

## Corolario (Superficies minimales y aplicaciones holomorfas)

*Una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie minimal, si y solamente si la diferencial*

$$2 \frac{\partial X}{\partial z} : U \longrightarrow \mathbf{Q}^3, \quad u + iv \longmapsto \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) - i \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

*de una parametrización regular conforme  $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación holomorfa de  $U$  a la cuádrica  $\mathbf{Q}^3 \subset \mathbb{C}^3$ .*

## Lema (Parametrización espinorial de la cuádrica I)

*Una propiedad interesante de la cuádrica  $\mathbf{Q}^3$  en dimensión tres es que tiene una parametrización “espinorial” en el sentido que la aplicación holomorfa de variedades complejas es sobreyectiva:*

$$\psi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{Q}^3 \setminus \{0\}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ i\alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \end{pmatrix}$$

*Además todo elemento de  $\mathbf{Q}^3 \setminus \{0\}$  tiene exactamente dos preimágenes, que se distinguen solamente en un signo.*

## Lema (Parametrización espinorial de la cuádriga I)

*Una propiedad interesante de la cuádriga  $\mathbf{Q}^3$  en dimensión tres es que tiene una parametrización “espinorial” en el sentido que la aplicación holomorfa de variedades complejas es sobreyectiva:*

$$\psi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{Q}^3 \setminus \{0\}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ i\alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \end{pmatrix}$$

*Además todo elemento de  $\mathbf{Q}^3 \setminus \{0\}$  tiene exactamente dos preimágenes, que se distinguen solamente en un signo.*

## Corolario (Cuádriga y espacio real proyectivo)

*En consecuencia  $\mathbf{Q}^3 \setminus \{0\}$  es difeomorfo al producto Cartesiano de  $\mathbb{R}^+$  con el espacio real proyectivo  $\mathbb{R}P^3 = S^3/\pm\text{id}$ :*

$$\mathbf{Q}^3 \setminus \{0\} \cong (\mathbb{R}^+ \times S^3)/\pm\text{id} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}P^3$$

## Demostración (Parametrización espinorial de la cuádriga II)

Consideramos un vector en  $\mathbb{C}^2$  y su imagen en  $\mathbb{C}^3$  bajo  $\Psi$ :

$$\Psi : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad \iff \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ z_2 = i\alpha\beta \\ z_3 = \frac{i}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \end{cases}$$

La imagen es un elemento de la cuádriga  $\mathbf{Q}^3$ , si y solamente si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \iff \underbrace{(z_1 - iz_3)}_{=\alpha^2} \underbrace{(z_1 + iz_3)}_{=\beta^2} = (-iz_2)^2$$

pero la última ecuación se reduce a la tautología  $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$ .  
Entonces  $\Psi$  manda  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  de hecho a la cuádriga  $\mathbf{Q}^3$ .

## Demostración (Parametrización espinorial de la cuádriga III)

*Para construir una preimagen de un elemento de la cuádriga*

$$Z := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}^3 \setminus \{0\}$$

*usamos la misma versión de la condición que define  $\mathbf{Q}^3$ . Sean*

$$\alpha := \pm \sqrt{z_1 - iz_3} \qquad \beta := \pm \sqrt{z_1 + iz_3}$$

*entonces  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  es una preimagen de  $Z$ , si elegimos los dos signos de tal manera que  $\alpha\beta = -iz_2$ . Aparente eso es posible, por que por definición es verdad que  $\alpha^2\beta^2 = (-iz_2)^2$ .  $\square$*

## Corolario (Parametrización de costumbre de la cuádrica)

*Desgraciadamente los textos sobre la parametrización de Enneper–Weierstraß suelen usar una parametrización un poquito diferente para la cuádrica:*

$$\Psi_{\text{mod}} : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbf{Q}^3, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f \frac{1+g^2}{2} \\ ifg \\ if \frac{1-g^2}{2} \end{pmatrix}$$

*Después de sustituir  $f = \alpha^2$  y  $g = \frac{\beta}{\alpha}$  la parametrización de costumbre  $\Psi_{\text{mod}}$  es igual a la parametrización espinorial  $\Psi$ .*

*Sin embargo nos queda un problema con la singularidad de la parametrización de costumbre en  $\alpha = 0$ , es decir en el subconjunto  $\{z_1 = iz_3\} \cap \mathbf{Q}^3$  de la cuádrica.*



# El Problema de los Períodos

## Definición (Integral compleja a lo largo de un camino)

Dado un camino  $\gamma$  en  $\mathbb{C}$ , es decir una aplicación diferenciable  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$ , y una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la integral compleja de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  es:

$$\int_{\gamma} f(w) dw := \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\in \mathbb{C}} dt$$

## Definición (Integral compleja a lo largo de un camino)

Dado un camino  $\gamma$  en  $\mathbb{C}$ , es decir una aplicación diferenciable  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$ , y una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la integral compleja de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  es:

$$\int_{\gamma} f(w) dw := \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\in \mathbb{C}} dt$$

## ¡Integral compleja no es una integral de camino!

También hay una integral completamente diferente, que se llama integral de camino y se denota más ó menos igual: es:

$$\int_{\gamma} f(w) |dw| = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

En general las dos integrales tienen absolutamente nada de ver en común, y es el placer de los profesores de verificar, si o sino sus estudiantes comprendieron ya la diferencia.

## Teorema (Integral compleja de funciones holomorfas)

Sea  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  una antiderivada holomorfa de una función holomorfa  $f$  en el sentido  $\frac{\partial F}{\partial z}(z) = f(z)$  y  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ . Entonces la integral compleja de  $f$  a lo largo de  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$  satisface:

$$\int_{\gamma} f(w) dw = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0))$$

En particular la integral compleja solamente depende del punto inicial  $\gamma(t_0)$  y final  $\gamma(t_1)$  de  $\gamma$ .

## Teorema (Integral compleja de funciones holomorfas)

Sea  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  una antiderivada holomorfa de una función holomorfa  $f$  en el sentido  $\frac{\partial F}{\partial z}(z) = f(z)$  y  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ . Entonces la integral compleja de  $f$  a lo largo de  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$  satisface:

$$\int_{\gamma} f(w) dw = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0))$$

En particular la integral compleja solamente depende del punto inicial  $\gamma(t_0)$  y final  $\gamma(t_1)$  de  $\gamma$ .

## Ejemplo

Sea  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  un camino en  $\mathbb{C}$ , entonces

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w} = \ln \gamma(t_1) - \ln \gamma(t_0)$$

por que  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$  y  $\frac{\partial}{\partial z}(\ln z) = \frac{1}{z}$ . ¡Algo está extraño!

## Problema (El problema de períodos)

El problema en el ultimo ejemplo es que la función  $\frac{1}{z}$  no es definida en todo del  $\mathbb{C}$ , sino solamente en  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . ¿Por dios, como puede un camino  $\gamma$  en  $\mathbb{C}^*$  tener nota del pequeño hueco en  $\{0\}$ ?

## Problema (El problema de períodos)

El problema en el ultimo ejemplo es que la función  $\frac{1}{z}$  no es definida en todo del  $\mathbb{C}$ , sino solamente en  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . ¿Por dios, como puede un camino  $\gamma$  en  $\mathbb{C}^*$  tener nota del pequeño hueco en  $\{0\}$ ?

## Teorema (La integral compleja de funciones holomorfas)

*Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa definida en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  y  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  un camino en  $U$ . Entonces la integral compleja de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  solamente depende de la clase de homotopía de  $\gamma$  en el espacio de caminos  $\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow U$  con punto inicial  $\tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(t_0)$  y punto final  $\tilde{\gamma}(t_1) = \gamma(t_1)$  fijos.*

## Definición (Períodos de la integral compleja)

Sea  $f : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa definida en  $\mathbb{C}$  salvo un subconjunto discreto  $S \subset \mathbb{C}$ . Los valores de la integral compleja de  $f$  a lo largo de caminos  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus S$  con  $\gamma(t_1) = \gamma(t_0)$  se llaman los períodos de  $f$ .

## Lema (Aditividad de los Períodos)

Como antes sea  $f : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa definida en  $\mathbb{C}$  salvo un subconjunto discreto  $S \subset \mathbb{C}$ . Los períodos de  $f$  pertenecen al subgrupo  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  aditivo engenerado de los períodos de los caminos  $\gamma_s : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus S$ ,  $t \mapsto s + re^{it}$ , por  $s \in S$  y  $r > 0$  suficiente pequeño. Modulo el subgrupo  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  la integral compleja no depende del camino, es decir

$$\int_{z_0}^{z_1} f(w) dw + \Lambda \in \mathbb{C}/\Lambda$$

es bien definido por todos puntos  $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus S$ .



### Ejemplo (Períodos de la función $\frac{1}{z}$ )

Los períodos de la función holomorfa  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , son engenerado del período del camino  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $t \mapsto re^{it}$ ,

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} (ire^{it}) dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

con  $\dot{\gamma}(t) = ire^{it}$ , en particular tenemos por todos  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^*$ :

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dw}{w} + 2\pi i\mathbb{Z} = \ln z_1 - \ln z_0 + 2\pi i\mathbb{Z}$$